ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 13 | Juni 1933 | Heft 3

Inhalt:

Seite

Aerodynamik-Tagung in Göttingen Juni 1933 Vorträge von Schlichting, Nikuradse, Reichardt und Schrenk . . . 171

Hauptaufsätze. E. Hahnkamm: Erzwungene Schwingungen reibungsgekoppelter Schwingungssysteme . . . 183

C. Schwarz: Zur rechnerischen Behandlung der Erstarrungsvorgänge beim Gießen von Metallen 202

F. Weinig: Zur Frage der Abrundung und Zuschärfung umströmter Kanten . . . 224

G. Schulz: Über Markoffsche Ketten höherer Ordnung . . . 235

Kleine Mitteilungen. A. Huber: Über die kräftefreie Bewegung einer idealen Flüssigkeit in einem elastischen Rohre . . . 239

K. A. Flocke: Geschwindigkeitsermittlung beim Römergetriebe und ähnlichen Getrieben . . . 241

K. Federhofer: Zur Ermittlung des Beschleunigungspoles der ebenen Systembewegung . . . 243

Buchbesprechungen. Prandtl und Betz: Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. — Soldau: Über Geschwindigkeitsformeln. — Hayashi: Tafeln für die Differenzenrechnung sowie für die Hyperbel-, Besselschen, elliptischen und anderen Funktionen. — Müller: Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten. — Hilbert und Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie. — Schmidt: Einführung in die Theorie der Wellengleichung. — Spannhake: Kreiselräder als Pumpen und Turbinen. — Kellerer: Mathematische Methoden in der Eisenbahnstatistik. — Stieda: Johann Albrecht Euler in seinen Briefen 1766 bis 1790. — Schaefer: Einführung in die theoretische Physik. I. Teil: Elektrodynamik und Optik. — Gröber und Erk: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. — Germar: Die Getriebe für Normdrehzahlen. — Krey †: Erddruck, Erdwiderstand und Tragfähigkeit des Baugrundes. — Campini: Construzioni Idrauliche e Idraulica Tecnica. — Felgentraeger: Feine Waagen, Wägungen und Gewichte. — Kayser und Konen: Handbuch der Spectroscopie. — Plassmann: Tafel der Viertel-Quadrate aller Zahlen von 1 bis 20009. — Kruppa: Technische Übungsaufgaben für darstellende Geometrie. — Weitere eingegangene Bücher 244

Nachrichten . . . 249

Aerodynamik-Tagung in Göttingen Juni 1933.

Aus Anlaß des 25jährigen Bestehens der Aerodynamischen Versuchsanstalt in Göttingen fand am 6. und 7. Juni in Göttingen eine Tagung der Ortsgruppe Göttingen der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik statt. Hierbei wurden aus dem Kreise der Prandtlschen Schule eine Reihe wissenschaftlicher Vorträge gehalten. Einige von diesen, deren Stoff in den Rahmen der ZAMM paßt, werden im folgenden in kurzen, von den Verfassern selbst herrührenden Auszügen veröffentlicht.

1. Berechnung der Anfachung kleiner Störungen bei der Plattenströmung[1]).

Von *H. Schlichting* in Göttingen.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Es soll hier kurz über einen Beitrag zur Theorie der Turbulenzentstehung berichtet werden, der an anderer Stelle ausführlicher veröffentlicht wird[2]).

Die theoretische Berechnung der Stabilitätsgrenze (kritische Reynoldssche Zahl) mit Hilfe der Methode der kleinen Schwingungen gelang für eine ebene Laminarströmung zuerst Herrn W. Tollmien[3]) in einer Arbeit von 1929, nachdem schon früher L. Prandtl[4]) und O. Tietjens[5]) unter Berücksichtigung einer kleinen Reibung wohl instabile Schwingungen, aber keine Stabilitätsgrenze erhalten hatten. Bei der Stabilitätsuntersuchung einer Laminarströmung nach der Methode der kleinen Schwingungen denkt man sich der vorgegebenen (bisher meist ebenen) Laminarströmung kleine Störungen in Form einer in der Hauptströmungsrichtung fortschreitenden Wellenbewegung überlagert (x, y = rechtwinklige Koordinaten in der Ebene; x = Hauptströmungsrichtung; Laminarströmung $U = U(y)$). Die Störungsbewegung denkt man sich nach Fourier in Partialschwingungen zerlegt, so daß man für die Stromfunktion einer solchen Partialschwingung hat:

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y)\, e^{i(\alpha x - \beta t)} = \varphi(y)\, e^{i[\alpha x - (\beta_r + i\beta_i)t]}.$$

Dabei ist α immer reell und bedeutet die räumliche Kreisfrequenz $\left(\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = \text{Wellenlänge}\right)$ der Störung, während der Realteil β_r die zeitliche Kreisfrequenz $\left(T = \frac{2\pi}{\beta_r} = \text{Schwingungszeit}\right)$

[1]) Vorgetragen im Mechanik-Kolloquium zu Göttingen am 15. 2. 1933.
[2]) Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1933. S. 181.
[3]) W. Tollmien: Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1929, S. 21.
[4]) L. Prandtl: Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 1, S. 431, 1921.
[5]) O. Tietjens: Diss. Göttingen 1922, bzw. Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 5, S. 200, 1925.

und der Imaginärteil β_i die Anfachung bzw. Dämpfung der betreffenden Störung gibt, je nachdem ob positiv oder negativ. Für die Störungsamplitude φ erhält man aus den Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen eine lineare Differentialgleichung 4. Ordnung, die Störungsdifferentialgleichung.

Die Ermittlung der Anfachung erweist sich als ein Eigenwertproblem dieser Störungsdifferentialgleichung derart, daß sich zu jedem Wertepaar α, R (R = Reynoldssche Zahl) ein Wert von β ergibt, dessen Imaginärteil über die Anfachung oder Dämpfung der betreffenden Störung (α) bei dem betreffenden Strömungszustand (R) entscheidet. Tollmien hat für das Beispiel der Strömung längs einer ebenen Platte dieses Eigenwertproblem mit Näherungsmethoden gelöst für den Spezialfall $\beta_i = 0$. Dadurch erhält man diejenigen Störungen, die gerade an der Grenze zwischen Stabilität und Labilität liegen; diese bilden in der α, R-Ebene eine Kurve (Indifferenzkurve), welche die stabilen Störungen trennt von den instabilen. Es zeigt sich, daß die Wellenlängen der instabilen Störungen etwa von der Größenordnung der 30fachen Verdrängungsdicke der Grenzschicht sind. Die Tollmiensche Arbeit, sowie fast alle übrigen bisherigen Arbeiten über die Theorie der Turbulenzentstehung[6]) geben keine Aussage über die Größe der Anfachung der als instabil gefundenen Störungen, deren Kenntnis gerade für den Vergleich mit dem Experiment sehr wichtig ist.

Wir haben es deshalb unternommen, in dieser Richtung die Tollmiensche Arbeit zu erweitern, und konnten durch Fortbildung jener Rechnung näherungsweise die Anfachung der instabilen Störungen berechnen. Dabei wurden zunächst solche Störungen betrachtet, die in der Nähe der Indifferenzkurve liegen, für die also die Anfachung β_i klein ist, so daß man Terme der Größenordnung β_i^2 vernachlässigen kann. Man entwickelt die aus den Randbedingungen resultierende Gleichung für die Eigenwerte nach Potenzen von β_i, $\alpha - \alpha_0$, $R - R_0$, wo α_0, R_0 ein Punkt der Indifferenzkurve ist. Die Glieder nullter Ordnung dieser Entwicklung geben die schon früher von Tollmien diskutierte Gleichung der Indifferenzkurve. Die Glieder erster Ordnung ergeben die Werte der partiellen Ableitungen $\left(\frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha}\right)_{\substack{\alpha=\alpha_0\\ R=R_0}}$ und $\left(\frac{\partial \beta_i}{\partial R}\right)_{\substack{\alpha=\alpha_0\\ R=R_0}}$ in Punkten der Differenzkurve und damit

$$\beta_i = (\alpha - \alpha_0)\left(\frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha}\right)_0 + (R - R_0)\left(\frac{\partial \beta_i}{\partial R}\right)_0$$

in der Nähe der Indifferenzkurve. Durch eine einfache Interpolation erhalten wir hieraus Näherungswerte der Anfachungsgröße β_i für die instabilen Störungen im Innern des von der Indifferenzkurve $\beta_i = 0$ umschlossenen Instabilitätsbereiches. Ein Schnitt R = const schneidet die Kurve $\beta_i = 0$ in den beiden Punkten α_1, α_2 und die Fläche $\beta_i = \beta_i(\alpha, R)$ in einer Kurve, die wir ersetzen durch eine Parabel 3. Ordnung, die durch die Punkte α_1, α_2 geht und hier die von uns berechneten Neigungen $\left(\frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha}\right)_1$ und $\left(\frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha}\right)_2$ besitzt. Auf diese Weise haben wir für das Beispiel der Laminarströmung längs der ebenen Platte die Fläche $\beta_i = \beta_i(\alpha, R)$ errechnet und dann in dem α, R-Diagramm die Kurven β_i = const gezeichnet (Abb. 1), wobei alle Größen mit der maximalen Geschwindigkeit U_m der Laminarströmung und der Verdrängungsdicke der Grenzschicht δ^* dimensionslos gemacht worden sind $\left(R = \frac{U_m \delta^*}{\nu};\ \nu = \text{kin. Zähigkeit}\right)$.

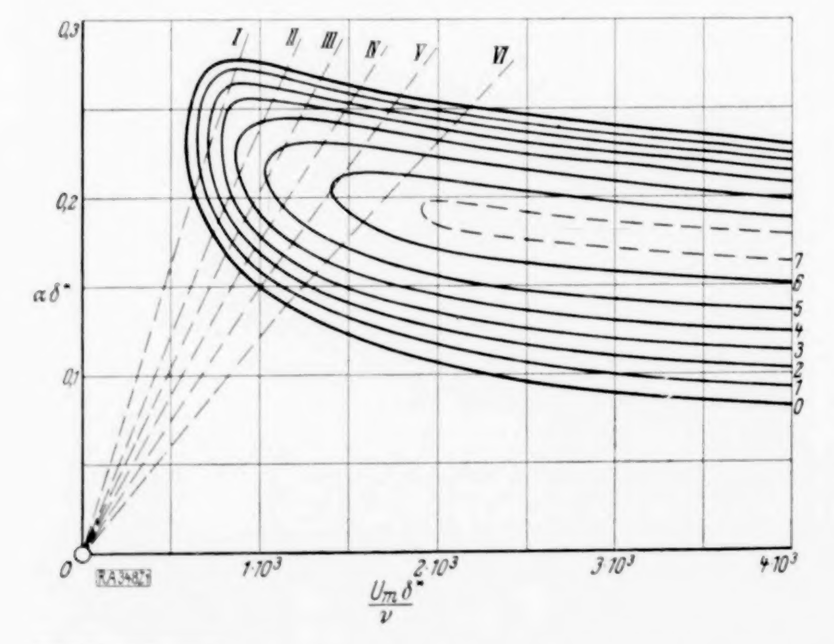


Abb. 1. Die Kurven konstanter Anfachung, $\frac{\beta_i \delta^*}{U_m}$ = const, als Funktion der Reynoldsschen Zahl $\frac{U_m \delta^*}{\nu}$ und der reziproken Störungswellenlänge $\alpha \delta^* = 2\pi \frac{\delta^*}{\lambda}$.

I:	$\frac{\beta_r \nu}{U_m^2} = 12{,}9 \cdot 10^{-5}$	0:	$\frac{\beta_i \delta^*}{U_m} = 0$
II:	$= 9{,}20 \cdot 10^{-5}$	1:	$= 0{,}001$
III:	$= 7{,}56 \cdot 10^{-5}$	2:	$= 0{,}002$
IV:	$= 6{,}23 \cdot 10^{-5}$	3:	$= 0{,}003$
V:	$= 5{,}13 \cdot 10^{-5}$	4:	$= 0{,}004$
VI:	$= 4{,}00 \cdot 10^{-5}$	5:	$= 0{,}005$
		6:	$= 0{,}006$
		7:	$= 0{,}0065$.

[6]) Vgl. z. B. G. I. Taylor: Proc. Roy. Soc. A. Vol. 132, 1931, S. 499. — S. Goldstein: Proc. Roy. Soc. A. Vol. 132, 1931, S. 524. — H. Schlichting: Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1932, S. 160 und Ann. d. Phys. V. Folge, Bd. 14, 1932, S. 905. O. Tietjens dagegen hat versucht, die Anfachung zu berechnen.

Durch Auswertung dieses Diagramms ergibt sich folgendes: Verfolgt man bei konstantem U_m und ν eine Störung von vorgegebener Kreisfrequenz β_r vom Anfangspunkt der Platte ($x = 0$) auf ihrem Wege x längs der Platte, so durchläuft diese Störung, die sich mit der Gruppengeschwindigkeit $c_r + \alpha \left(\frac{\partial c_r}{\partial \alpha}\right)_R$ fortpflanzt, zunächst einen stabilen Bereich, wo sie gedämpft wird, tritt sodann mit einer Amplitude A_1 bei einem bestimmten Wert von $\frac{U_m x_1}{\nu}$ in den instabilen Bereich ein, den sie bei $\frac{U_m x_2}{\nu}$ mit der Amplitude $A_2 = a(x_2) \cdot A_1$ wieder verläßt, wobei

$$a(x_2) = e^{\int_{t_1}^{t_2} \beta_i \, d t} \quad \text{bei konstantem} \quad \frac{\beta_r \nu}{U_m^2}$$

der Anfachungsfaktor ist. t_1 und t_2 sind die Zeiten des Eintritts und des Austritts aus dem instabilen Gebiet. Die zusammengehörigen Werte der dimensionslosen Größen

$\frac{\beta_r \nu}{U_m^2}$, $\frac{T U_m^2}{\nu}$, $\frac{U_m \delta_1^*}{\nu}$, $\frac{U_m \delta_2^*}{\nu}$, $\frac{U_m x_1}{\nu}$, $\frac{U_m x_2}{\nu}$, $\left(\frac{\lambda}{\delta^*}\right)_1$, $\left(\frac{\lambda}{\delta^*}\right)_2$, $\left(\frac{c_r}{U_m}\right)_1$, $\left(\frac{c_r}{U_m}\right)_2$, $\frac{\alpha_1}{U_m}\left(\frac{\partial c_r}{\partial \alpha}\right)_{R_1}$, $\frac{\alpha_2}{U_m}\left(\frac{\partial c_r}{\partial \alpha}\right)_{R_2}$, $a(x_2)$, wo $c_r = \frac{\beta_r}{\alpha}$ die Phasengeschwindigkeit der Störung bedeutet, sind in Zahlentafel I angegeben. Dabei bezieht sich der Index 1 auf den unteren und der Index 2 auf den oberen Zweig der Indifferenzkurve.

Zahlentafel I.

	$\frac{\beta_r \nu}{U_m^2} \cdot 10^5$	$\frac{T U_m^2}{\nu} \cdot 10^{-5}$	$\frac{U_m \delta_1^*}{\nu} \cdot 10^{-3}$	$\frac{U_m \delta_2^*}{\nu} \cdot 10^{-3}$	$\frac{U_m x_1}{\nu} \cdot 10^{-5}$	$\frac{U_m x_2}{\nu} \cdot 10^{-5}$	$\left(\frac{\lambda}{\delta^*}\right)_1$
I	12,9	0,487	0,635	0,880	1,35	2,59	30,7
II	9,20	0,682	0,735	1,15	1,81	4,41	34,7
III	7,56	0,830	0,810	1,34	2,19	6,00	37,1
IV	6,23	1,01	0,895	1,55	2,67	8,02	39,6
V	5,13	1,23	1,00	1,79	3,34	10,7	41,9
VI	4,00	1,57	1,15	2,18	4,28	15,4	44,9

	$\left(\frac{\lambda}{\delta^*}\right)_2$	$\left(\frac{c_r}{U_m}\right)_1$	$\left(\frac{c_r}{U_m}\right)_2$	$\frac{\alpha_1}{U_m}\left(\frac{\partial c_r}{\partial \alpha}\right)_{R_1}$	$\frac{\alpha_2}{U_m}\left(\frac{\partial c_r}{\partial \alpha}\right)_{R_2}$	$a(x_2)$
I	22,7	0,400	0,410	0,058	0,120	1,77
II	23,1	0,375	0,391	0,064	0,124	4,95
III	23,4	0,362	0,377	0,066	0,119	12,0
IV	24,1	0,350	0,370	0,068	0,114	36,6
V	24,4	0,341	0,359	0,069	0,108	103
VI	25,0	0,329	0,347	0,066	0,100	742

Wir lassen jetzt Störungen aller möglichen Frequenzen β_r zu und fragen nach der größtmöglichen Anfachung

$$a(x) = e^{\operatorname{Max} \int_{t_1}^{t(x)} \beta_i \, d t},$$

die vom Eintritt in das Instabilitätsgebiet bis zu einer Stelle $\frac{U_m x}{\nu}$ eingetreten sein kann. Da man es in der Praxis immer mit Störungen aller möglichen Frequenzen zu tun hat, ist dieses $a(x)$ das ausschlaggebende Maß für die Anfachung. Unsere numerische Rechnung ergibt für die Anfachungsgröße $a(x)$ in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl $\frac{U_m x}{\nu}$ einen funktionellen Zusammenhang, der in Abb. 2 dargestellt ist, und der sich im ganzen Bereich von der theoretischen Stabilitätsgrenze bis etwa $\frac{U_m x}{\nu} = 10^6$ durch die einfache Interpolationsformel

$$a(x) = 0{,}55\, e^{0{,}55 \cdot 10^{-5} \frac{U_m x}{\nu}}$$

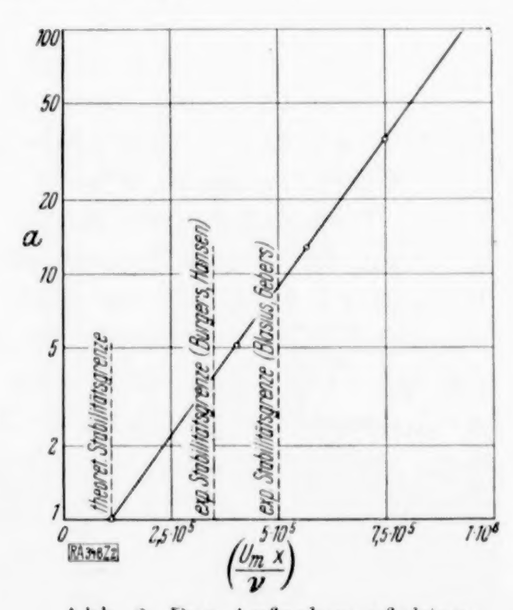


Abb. 2. Der Anfachungsfaktor $a(x) = e^{\operatorname{Max} \int_{t_1}^{t(x)} \beta_i \, d t}$ als Funktion der Reynoldsschen Zahl $\frac{U_m x}{\nu}$.

darstellen läßt. Die theoretische Stabilitätsgrenze ($a = 1$) liegt bei $\frac{U_m x}{\nu} = 1{,}1 \cdot 10^5$. Für die experimentell gefundene Stabilitätsgrenze, die nach Hansen[7]), Burgers[8]) und v. d. Hegge Zijnen[9])(Anblasversuche) bei $\frac{U_m x}{\nu} = 3{,}5 \cdot 10^5$ und nach Gebers[10])(Schleppversuch) bei $\frac{U_m x}{\nu} = 5 \cdot 10^5$ liegt, ergibt sich nach unserer Theorie eine Anfachung $a = 4$ bzw. 9, also eine Anfachung, die durchaus von der Größe ist, daß durch sie die Turbulenzentstehung aus den langen instabilen Störungswellenlängen erklärt werden kann. 348

2. Experimentelle Untersuchungen zur Turbulenzentstehung.

Von *J. Nikuradse* in Göttingen.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Um zu prüfen, inwieweit die Ergebnisse der theoretischen Untersuchungen von W. Tollmien[1]) und H. Schlichting[2]) (siehe auch den vorangehenden Aufsatz) mit dem Experiment in Einklang stehen, sind mit der in dieser Zeitschrift schon früher kurz beschriebenen Einrichtung[3]) Versuche der Art gemacht worden, daß der Einfluß von periodischen Störungen der Grenzschicht auf die Turbulenzentstehung beobachtet wurde. Da die Versuchseinrichtung seit der ersten Mitteilung noch einige bauliche Veränderung erfahren hat, sei sie hier gemäß dem jetzigen Zustand noch einmal beschrieben.

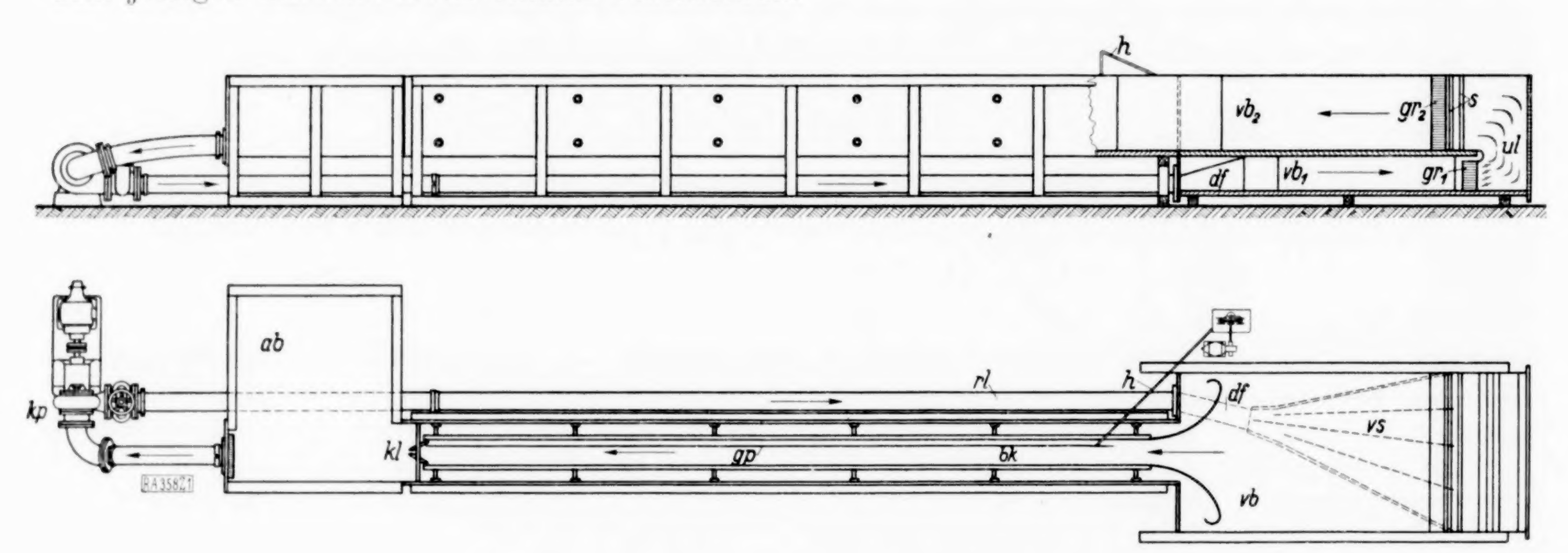


Abb. 1. Gesamtanlage des Beobachtungskanals.

bk = Beobachtungskanal	vb = Vorratsbecken	df = Diffusor	s = Siebe
kp = Kreiselpumpe	vb_1 = unterer Teil des Vorratsbeckens	gr_1 = Gleichrichter	kl = Klappen
ab = Ausgleichbecken	vb_2 = oberer Teil des Vorratsbeckens	gr_2 = Gleichrichter	gp = Glasplatte
rl = Rohrleitung	vs = Verteilersystem	ul = Umlenkschaufeln	h = Heberleitung

In einem Beobachtungskanal bk (Abb. 1) wird eine gleichmäßige Strömung in der Weise erzeugt, daß man mit Hilfe einer Kreiselpumpe kp das Wasser aus dem Ausgleichbecken ab durch eine Rohrleitung rl in das Vorratsbecken vb fördert, von wo es durch den Beobachtungskanal wieder in das Ausgleichbecken zurückfließt. Der Vorratskanal ist durch einen Zwischenboden in zwei Teile geteilt. Der untere Teil vb_1 enthält das Verteilersystem vs, das die Aufgabe hat, das Wasser möglichst gleichmäßig von dem Querschnitt der Rohrleitung rl von 176 cm² auf einen Querschnitt von 120×30 cm zu verteilen. Es besteht aus einem Diffusor df von 60 cm Länge und 4 von außen verstellbaren Diffusoren von 170 cm Länge. Um eine Ablösung der Strömung in den Diffusoren zu vermeiden, durfte der Erweiterungswinkel nicht größer als 9° gewählt werden. Der Gleichrichter gr_1, der hinter den Diffusoren steht, richtet die Strömung wieder parallel. Die Strömung wird durch Umlenkschaufeln ul zu den 4 Sieben s geführt, welche sich im oberen Teil des Vorratsbeckens

[7]) M. Hansen: Ztschr. f. angew. Math. u Mech. Bd 8, S. 185, 1928.
[8]) J. M. Burgers: Proc. of the First Intern. Congr. f. Applied Mechanics, Delft 1924, S. 113.
[9]) B. G. v. d. Hegge Zijnen: Thesis Delft 1924.
[10]) G. A. Gebers: Schiffbau 9, 1907, vgl. auch III. Lief. d Ergebn. d. Aerodyn. Versuchsanst. zu Göttingen 1927.

[1]) W. Tollmien: Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1929. S. 21.
[2]) H. Schlichting: Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1933. S. 181.
[3]) L. Prandtl: Über die Entstehung der Turbulenz. ZAMM Bd. 11, S. 467, 1931.

vb_2 befinden. Diese Siebe sollen die ungleichmäßige Wirbelströmung beruhigen. Die Siebe werden auf versteifte Eisenrahmen straff gespannt, um örtliche Querbewegungen der Strömung zu verhindern. Hinter den Sieben befindet sich ein besonders sorgfältig hergestellter Gleichrichter gr_2 mit quadratischen Öffnungen von 1 cm² Querschnitt und 12 cm Länge. Diese Abmessungen sind durch die Überlegung bedingt, daß bei der in vb_2 auftretenden Höchstgeschwindigkeit, die 5 bis 6 cm/sec beträgt, die Strömung noch laminar verlaufen soll.

In dem eigentlichen Kanal befinden sich 2 Eisenplatten von 600 cm Länge und 60 cm Tiefe, die durch Schrauben in einem einstellbaren Abstand von der eigentlichen Kanalwand gehalten werden. Die Wände sind zur Zeit so eingebaut, daß der Kanal eine kleine Erweiterung von etwa $\alpha = 0{,}13^0$ besitzt, um eine Strömung ohne Druckanstieg oder Druckabfall zu bekommen. Am Einlauf sind 2 gekrümmte Eisenbleche angebracht, die für eine sanfte Beschleunigung der Strömung sorgen. Die an der Wand des Beckens vb_2 auftretenden kleinen Wirbel fließen hinter den Eisenblechen außerhalb des Beobachtungskanals ab. Dieses Abfließen wird dadurch hervorgerufen, daß am Ende der Platten 2 Klappen kl angebracht sind, welche den Auslauf des Kanals verengen und dadurch bewirken, daß der Wasserspiegel im Kanal höher ist als außerhalb des Kanals. Infolgedessen strömt die Flüssigkeit außerhalb des Kanals schneller als innerhalb.

Das erwähnte Ausgleichbecken sorgt dafür, daß Geschwindigkeitsschwankungen, die durch Netzschwankungen hervorgerufen sind, unwirksam gemacht, und daß Längswellen im Beobachtungskanal vermieden werden.

Trotz dieser Sicherheitsmaßnahmen war die Strömung in der Wandnähe bis zu einem Abstand von 5 bis 8 mm von der Wand nicht genügend zweidimensional. Um diese zweidimensionale Strömung zu erhalten, wurde eine Glasplatte gp von 60 cm Tiefe und 530 cm Länge in einer Entfernung von etwa 7 cm von der einen Wand eingebaut. Vor der Glasplatte wurde zur Erreichung eines wirbelfreien Zustroms ein keilförmiger Kopf aus Blech von der gleichen Tiefe und etwa 25 cm Länge angebracht (Abb. 2). Um eine regelmäßige

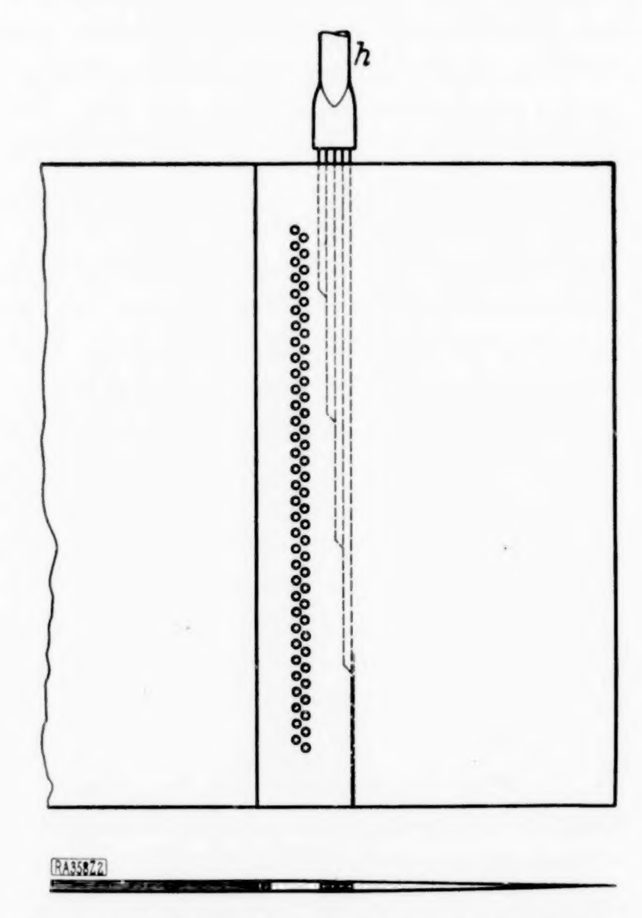


Abb. 2. Keilförmiger Kopf für die Glasplatte.
h = Heberleitung

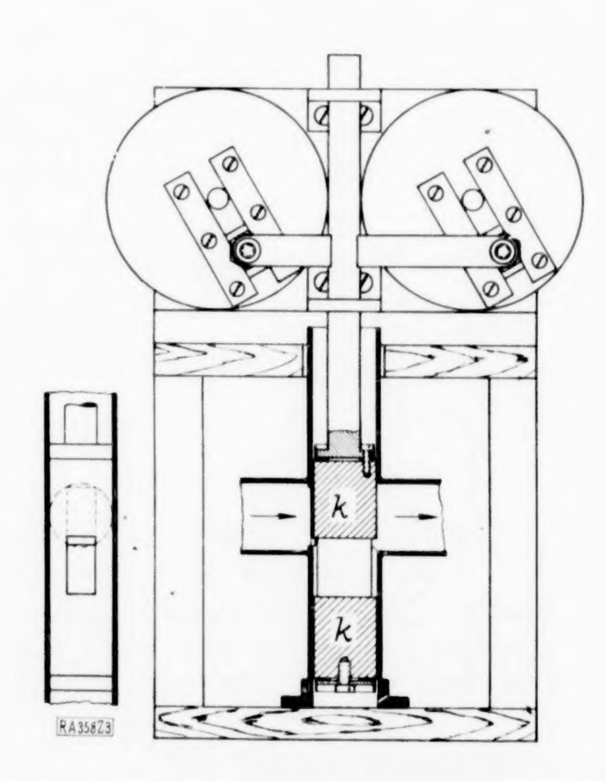


Abb. 3. Drosselvorrichtung.
k = Kolben

Störung der Strömung zu bewerkstelligen, wurde der Kopf mit 2 Reihen von Löchern versehen, durch die vorbeiströmende Grenzschicht periodisch abgesaugt werden kann. Diese Löcher münden in eine Kammer innerhalb des Ansatzes, aus der das Wasser durch 4 auf die ganze Lochreihe verteilte Röhren abgesaugt wird. Die Verteilung auf 4 Röhren war nötig, um eine gleichmäßige Absaugung zu erzielen. Diese 4 Röhren vereinigen sich zu einem Rohr, welches an einen regulierbaren Heber angeschlossen ist, der eine periodische Absaugung erzeugt. Die Heberleitung ist in Abb. 1 und 2 mit h bezeichnet. Die Drosselvorrichtung ist aus Abb. 3 zu erkennen. Um eine möglichst sinusförmige Veränderung des Durchflußquer-

schnittes mit der Längsverschiebung des Kolbens k zu erreichen, wurde die Durchflußöffnung im Schieber als schmales Rechteck ausgeführt. Der Kolben k wird durch einen aus der Abbildung genügend erkennbaren Antriebsmechanismus verschoben. Der Antrieb erfolgt durch einen regulierbaren Elektromotor.

Die Versuche wurden in der Weise durchgeführt, daß zunächst eine vorgegebene Geschwindigkeit eingestellt wurde, und sodann mit einer vorgegebenen Frequenz auf die oben beschriebene Weise Störungen erzeugt wurden. Gemessen wurde dann der Abstand x von der Störungsstelle, wo sich auf der mit Aluminiumpulver bestreuten Oberfläche die ersten Wirbel bildeten. Die Messungen wurden bei 8 verschiedenen Geschwindigkeiten, nämlich von $U_m = 13{,}9$ bis $U_m = 30{,}5$ cm/sec, ausgeführt und bei sehr vielen verschiedenen Frequenzen (von $\beta_r = 1{,}12$ pro min. bis $\beta_r = 11{,}5$ pro min.). Für die Bestimmung der kinematischen Zähigkeit ν wurde noch die Wassertemperatur gemessen. Nach der Rechnung von Tollmien gibt es oberhalb der kritischen Reynoldsschen Zahl $\left(\frac{U_m\,\delta^*}{\nu}\right)_k = 420$[4]) für jede Reynoldssche Zahl einen bestimmten Bereich von instabilen Frequenzen, der in Abb. 4 durch das von der Kurve umschlossene Gebiet dargestellt wird. Diese Kurve, welche die stabilen Störungen von den instabilen trennt, wird als Indifferenzkurve bezeichnet. In dieses Diagramm sind außerdem noch 6 verschiedene Geraden konstanter Frequenz $\frac{\beta_r\,\nu}{U_m{}^2} = \text{const}$ eingezeichnet. Diejenigen Versuchszustände, die Turbulenz ergaben, sind durch Punkte markiert. Dabei wurde die Verdrängungsdicke δ^* aus der gemessenen Entfernung x nach der Blasiusschen Formel $\delta^* = 1{,}73\sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U_m}}$ ermittelt. Durch Kreise sind diejenigen Frequenzen eingetragen, bei denen keine Turbulenz beobachtet wurde. Eine künstlich erzeugte Störung von vorgegebener Frequenz durchläuft, wenn sie von der Störungsstelle stromabwärts wandert, in diesem Diagramm von einem Punkt in der Nähe des Ursprungs beginnend eine Kurve $\frac{\beta_r\,\nu}{U_m{}^2} = \text{const}$. Dabei durchläuft sie zunächst das stabile Gebiet außerhalb der Indifferenzkurve, und tritt sodann, wenn sie die Kurve überschreitet, mit einer bestimmten Amplitude in das instabile Gebiet ein. Von diesem Augenblick an wird sie angefacht, bis sie beim abermaligen Überschreiten der Kurve das instabile Gebiet wieder verläßt und nun wieder langsam schwächer wird (vgl. hierzu die vorangehende Arbeit von H. Schlichting). Ist die Anfachung der Störung schon vorher genügend groß geworden, so führt sie zur Wirbelbildung und damit zum Turbulentwerden der Laminarströmung. Aus dieser Darlegung geht hervor, daß man nach der Theorie unterhalb der Indifferenzkurve und auch in der Nähe ihres unteren Randes keine Turbulenz beobachten sollte, daß jedoch Beobachtungen, die etwas oberhalb der Indifferenzkurve liegen, mit der Theorie nicht im Widerspruch stehen. Die bei niedrigen β-Werten liegenden Versuchspunkte stehen nach dem Vorstehenden mit der Theorie im Widerspruch. Möglicherweise ist die Erklärung die, daß bei der nicht vollkommen sinusförmigen Gestalt der der Grenzschicht aufgeprägten Störung sich irgendeine Oberwelle dieser Störung turbulenzerzeugend auswirkt. Eine klare Entscheidung für oder gegen die Tollmiensche Theorie steht hiernach noch aus. Die Versuche sollen fortgesetzt werden, vor allem auch mit geringerer Intensität der künstlichen Störung. Der kritische Wert ohne künstliche Störung liegt bei $U_m\,\delta^*/\nu = 1400$, entsprechend $U_m\,x/\nu = 655000$. 358

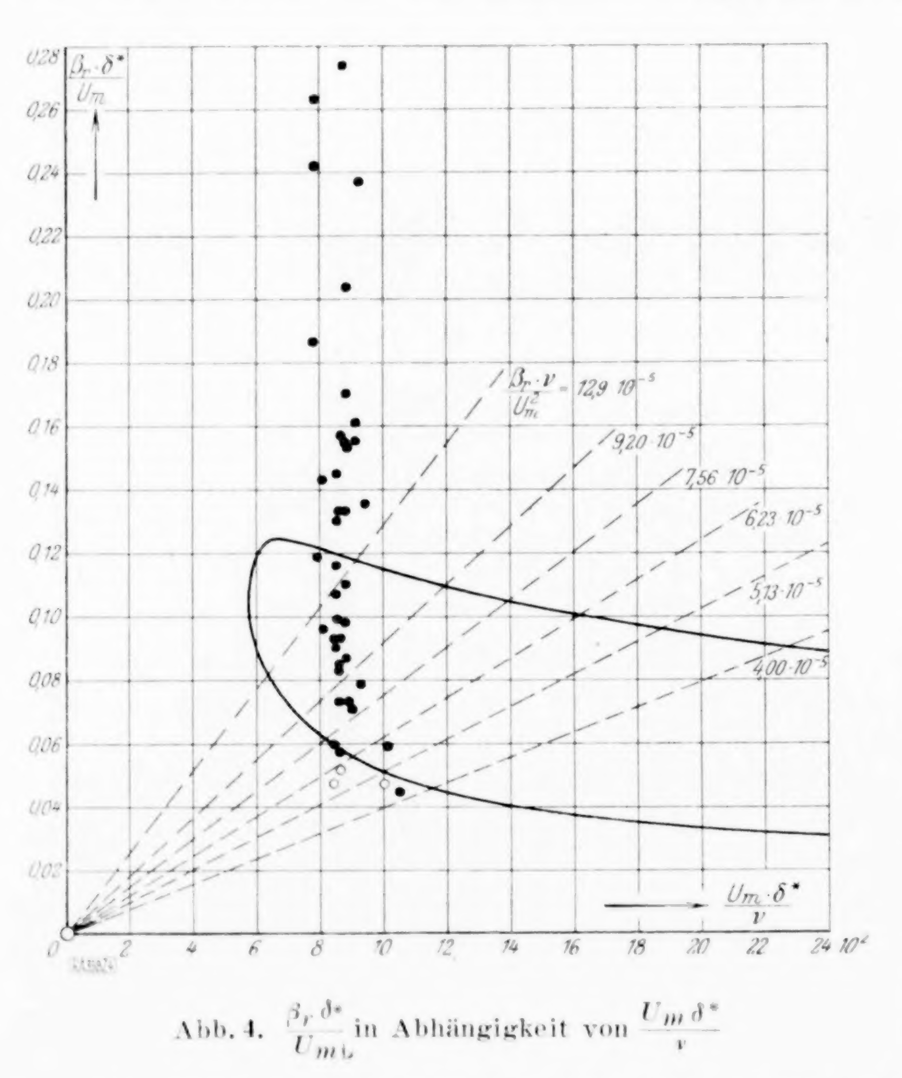


Abb. 4. $\frac{\beta_r\,\delta^*}{U_m}$ in Abhängigkeit von $\frac{U_m\,\delta^*}{\nu}$

[4]) von Schlichting neu berechnet zu 575, vgl. Gött. Nachr. 1933. S. 181.

3. Die quadratischen Mittelwerte der Längsschwankungen in der turbulenten Kanalströmung.

Von *H. Reichardt* in Göttingen.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

1. Versuchsplan. Es wurden die quadratischen Mittelwerte der Längsschwankungen (d. h. der Schwankungen in der Strömungsrichtung) in verschiedenen Wandabständen unter Verwendung einer Hitzdrahtsonde gemessen. Die theoretischen Betrachtungen zu diesen Versuchen sowie das Versuchsergebnis werden im folgenden mitgeteilt. Auf die Apparatur wird nur soweit eingegangen, als es zum Verständnis der vorliegenden Betrachtung notwendig ist. Eine genaue Beschreibung der Versuchsanlage erfolgt an anderer Stelle.

Der Luftkanal, in dem die Messungen vorgenommen wurden, hat eine Höhe von 25 cm und eine Breite von 100 cm, also einen hydraulischen Durchmesser von 40 cm. Die turbulente Strömung war ausgebildet. Die maximale Geschwindigkeit in der Kanalmitte betrug 110 cm/s, die über dem Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit $U \sim 90$ cm/s. Die Reynoldssche Zahl war also $Re \sim 25000$, die Widerstandszahl $\lambda \sim 0{,}025$ und die Schubspannungsgeschwindigkeit $v^* = \sqrt{\tau_0/\varrho} = \sqrt{\lambda/8}\, U \sim 5$ cm/s (τ_0 = Schubspannung an der Wand, ϱ = Dichte der Luft).

Da sich das turbulente Geschwindigkeitsfeld örtlich ändert, war es notwendig, die Messungen in einem möglichst kleinen Gebiet vorzunehmen. Der verwendete Hitzdraht war daher nur 2 mm lang. Die geringen Spannungsschwankungen über dem kleinen Hitzdraht mußten beträchtlich verstärkt werden. Es wurde mit einem Gleichspannungsverstärker gearbeitet (3 Röhren, Verstärkung etwa 10000fach), um Spannungsschwankungen von beliebiger Frequenz in einen formgetreuen Wechselstrom „umwandeln" zu können.

An den Ausgang des Verstärkers waren ein sehr empfindliches und sehr träges Elektrodynamometer und ein Galvanometer hintereinanderliegend angeschlossen. Das Dynamometer diente zur Bestimmung der quadratischen Mittelwerte der Stromschwankungen, die durch die Windschwankungen am Hitzdraht in der Endstufe des Verstärkers ausgelöst wurden. Der Verstärker wurde so eingestellt, daß durch das Dynamometer kein Gleichstrom floß; der Zeiger des Galvanometers mußte sich im Mittel um die Nullage bewegen.

2. Mittel gegen die Fehleigenschaften des Hitzdrahtes. Die Spannungsschwankungen über einem Hitzdraht sind gegenüber den Windschwankungen verzerrt und zwar aus zwei Gründen:

1. Wegen der Wärmeträgheit des Hitzdrahtes sind die Spannungsamplituden der höheren Frequenzen zu klein im Vergleich zu den Spannungsamplituden der niederen Frequenzen.
2. Auch bei quasistationären Änderungen sind die Spannungsschwankungen nicht proportional den Windschwankungen.

Für die Trägheitskonstante C eines Hitzdrahtes gilt die Gleichung[1]):

$$C = \frac{K(r - r_1)}{0{,}24\, a\, i^2\, r_1^2} \qquad (1)$$

(K = Wärmekapazität des Hitzdrahtes; r = Widerstand des geheizten Drahtes; r_1 = Widerstand des Hitzdrahtes bei Zimmertemperatur; a = Temperaturkoeffizient des Widerstandes; i = Heizstrom). Die Größe C hängt also außer von dem Hitzdrahtdurchmesser (der in K eingeht) noch von Heiztemperatur und Strombelastung bzw. von Heiztemperatur und Windgeschwindigkeit ab. Um für alle Windgeschwindigkeiten die gleiche Trägheitsgröße zu besitzen, wurde $(r - r_1)/i^2$ bei den Versuchen konstant gehalten. Ist C konstant, so werden die quadratischen Mittelwerte von Hitzdrahtwechselspannungen bei allen Windgeschwindigkeiten um den gleichen Faktor zu klein gemessen, vorausgesetzt, daß die Frequenzverteilung der Windschwankungen dieselbe bleibt.

Es wurden Hitzdrähte von 0,007 mm Durchmesser verwendet. Die Trägheitsgröße betrug $C \sim 4{,}2 \cdot 10^{-3}$, d. h. es wurden für Frequenzen unterhalb von 10 Hertz die Amplituden praktisch unverkürzt wiedergegeben. Es hat den Anschein, daß bei der betrachteten langsamen Strömung die größten Amplituden in diesem Frequenzbereich liegen. Man kann also mit gewisser Wahrscheinlichkeit annehmen, daß die Faktoren, um die die quadratischen Mittelwerte der Spannungsschwankungen zu klein gemessen wurden, nicht viel kleiner als 1 sind und daß sie untereinander wenig verschieden sind trotz verschiedener Frequenzverteilungen in den einzelnen Wandabständen.

[1]) Siehe z. B. J. M. Burgers: Hitzdrahtmessungen, Handbuch der Experimentalphysik, IV, 1; 1931.

Der Widerstand r eines Hitzdrahtes hängt in folgender Weise von der Windgeschwindigkeit u ab:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{u^n}{u^n - c\,i^2} \qquad (2)$$

(c = const. Die Zahl n wächst langsam mit der Reynoldsschen Zahl des Hitzdrahtes bis auf den Grenzwert 0,5. — Wärmestrahlung und Wärmeableitung an die Hitzdrahtenden sind in (2) nicht berücksichtigt). Gl. (2) besagt, daß die Spannung über dem Hitzdraht $i\,r$ schwächer als linear mit zunehmender Windgeschwindigkeit abnimmt (i = const vorausgesetzt) bzw. bei abnehmender Windstärke stärker als linear ansteigt. Nur bei kleinen Amplituden, wie sie bei der betrachteten Strömung in der Kanalmitte auftreten, sind die Spannungsschwankungen den Windschwankungen genügend proportional.

In dem vorliegenden Fall, wo nicht die Spannungsschwankungen über dem Hitzdraht, sondern die Stromschwankungen im Endkreis des Verstärkers gemessen wurden, war die Verzerrung der Spannungsschwankungen gegenüber den Windschwankungen an sich ohne Belang. Es kam lediglich darauf an, die Proportionalität zwischen Windschwankungen und Stromschwankungen zu erreichen. Dies geschah auf folgende Weise. Der Verstärker wurde so an den Hitzdrahtkreis angeschlossen, daß die Stromstärke in der Endstufe mit wachsender Windgeschwindigkeit zunahm. Der Verstärker wurde so eingestellt, daß die Stromschwankungen auf dem unteren, gekrümmten Teil der Strom-Spannungskennlinie erfolgte, wo also der Strom stärker als linear mit der Eingangsspannung wächst. Da nun die Eingangsspannung schwächer als linear mit der Windgeschwindigkeit wuchs, so ließ es sich durch entsprechende Wahl des Arbeitspunktes auf der Kennlinie sowie der Spannungsamplitude am Eingang[2]) erreichen, daß die Stromänderungen den Windänderungen annähernd proportional wurden. Diese Proportionalität war dann vorhanden, wenn sich die mittlere Stromstärke linear mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit im Kanal bzw. linear mit der Drehzahl des Gebläses veränderte.

3. Eichung und Auswertung. Aus der Größe der mittleren Stromänderung, die bei einer bestimmten Drehzahländerung des Gebläses erfolgt, läßt sich erfahren, wieviel Geschwindigkeitseinheiten der Einheit der Stromstärke entsprechen, wenn die Abhängigkeit der mittleren Windgeschwindigkeit am Hitzdraht von der Drehzahl des Gebläses bekannt ist. Es sei $d\,n|n$ die prozentuale Veränderung der Drehzahl, wodurch sich die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}$ im Abstand y von der Wand um $d\,\bar{u}/\bar{u}$ ändern möge, und es sei

$$\frac{d\,\bar{u}}{\bar{u}} = k\,\frac{d\,n}{n} \qquad (3).$$

Bei schwacher Belastung des Gebläses ist $d\,n/n \sim d\,U/U$ und dies ist wiederum, wenn man das Blasiussche Widerstandsgesetz zugrunde legt, $\sim \frac{8}{7}\,d\,v^*/v^*$ (siehe Nr. 1). Es ist also $k \sim \frac{8}{7}\,\frac{d\,\bar{u}}{d\,v^*}\,\frac{v^*}{\bar{u}}$. Nach Nikuradse[3]) ist

$$\bar{u} = v^*\,(2{,}5 \ln (v^*\,y/\nu) + 5{,}5) \qquad (4)$$

(ν = kinematische Zähigkeit), so daß man erhält:

$$k \sim \frac{8}{7}\,\frac{2{,}5 \ln (v^*\,y/\nu) + 8}{2{,}5 \ln (v^*\,y/\nu) + 5{,}5} \qquad (5).$$

Die prozentuale Änderung der mittleren Windgeschwindigkeit ist also größer als die prozentuale Änderung der Ventilatordrehzahl, und zwar ist der Unterschied um so größer, je näher an der Wand die Hitzdrahtsonde liegt (für die laminare Wandschicht gelten diese Betrachtungen nicht mehr).

Bei der vorgegebenen Apparatur kann die Eichung des Elektrodynamometers in Geschwindigkeitsquadraten in verschiedener Weise geschehen:

1. Das Galvanometer, welches dem Dynamometer vorgeschaltet ist, wird durch Drehzahländerung des Gebläses in Windgeschwindigkeiten geeicht und die Ausschläge des Dynamometers werden mit den Ausschlägen des Galvanometers verglichen.

Es sei i der Strom, der durch Dynamometer und Galvanometer fließt, wenn der Galvanometerzeiger um die Nullage pendelt, u' die turbulente Windschwankung bei normaler Dreh-

[2]) Es wurde ein entsprechend großer Teil der Wechselspannung des Hitzdrahtkreises über einem Potentiometer abgegriffen.

[3]) VDI-Forschungsheft 356, 1932.

zahl des Gebläses und δi ein kleiner, durch Fehleinstellung bewirkter Gleichstrom, so gilt bei normaler mittlerer Geschwindigkeit $\bar{u}$ am Hitzdraht

$$i = a\,u' + \delta i \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

falls die Stromänderung der Windänderung proportional ist (a = const). Der kleine Gleichstrom δi läßt sich kaum vermeiden, da es nicht gelingt, die Mittellage des sehr unregelmäßig schwankenden Galvanometerzeigers genau genug festzustellen und durch Nachregulieren in die Nullage des Galvanometers zu verlegen. Für die Messungen mit dem Dynamometer ist aber der kleine Fehlstrom δi ohne Belang.

$$\overline{i^2} = a^2\,\overline{u'^2} + \delta i^2 \sim a^2\,\overline{u'^2} \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

Für den Strom i_1, welcher fließt, wenn die Windgeschwindigkeit am Hitzdraht um Δu auf den mittleren Wert $\bar{u}_1$ erhöht wird, gilt:

$$i_1 = (a + \alpha)\,(\Delta u + u_1') + \delta i \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

(α = const), da man annehmen muß, daß die i-Δu-Funktion nicht genau linear ist, sondern für größere Geschwindigkeiten im Durchschnitt eine etwas andere Steigung besitzt als für kleinere Geschwindigkeiten. Wegen der unregelmäßigen Schwankungen des Galvanometerzeigers läßt sich eben eine genaue Proportionalität zwischen Stromänderung und Windänderung nicht erzielen. Man hat für den zeitlichen Mittelwert:

$$\bar{i}_1 = (a + \alpha)\,\Delta u + \delta i \quad \ldots \ldots \quad (8a).$$

Für den Strom i_2, der (entgegengesetzt zu i_1) durch Galvanometer und Dynamometer fließt, wenn die Windgeschwindigkeit am Hitzdraht um Δu auf den mittleren Wert $\bar{u}_2$ erniedrigt wird, gelten die Gleichungen:

$$i_2 = (a - \alpha)\,(\Delta u + u_2') - \delta i \quad \ldots \ldots \quad (9),$$

$$\bar{i}_2 = (a - \alpha)\,\Delta u - \delta i \quad \ldots \ldots \quad (9a).$$

Aus (7), (8a), (9a) und (3) folgt

$$\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\bar{u}} = \frac{2\,k\,\Delta n\,\sqrt{\overline{i^2}}}{n\,(\bar{i}_1 + \bar{i}_2)} \quad \ldots \ldots \quad (10).$$

Die Größen auf der rechten Seite dieser Gleichung sind sämtlich meßbar. $\bar{i}_1$ und $\bar{i}_2$ sind aus Galvanometerablesungen und $\overline{i^2}$ aus Dynamometerablesungen zu bestimmen.

2. Durch Drehzahländerung des Gebläses kann das Dynamometer direkt in Geschwindigkeitsquadraten geeicht werden.

Aus (8) und (9) folgt

$$\overline{i_1^2} + \overline{i_2^2} = a^2\,(2\,\Delta u^2 + \overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2}) + 2\,a\,\alpha\,(\overline{u_1'^2} - \overline{u_2'^2}) \quad \ldots \quad (11),$$

wenn die Glieder mit den sehr kleinen Größen α^2, δi^2 und $a\,\delta i$ vernachlässigt werden. Unter der plausiblen Annahme, daß für nicht zu große Geschwindigkeitsunterschiede $u_1' = u'\,u_1/\bar{u} = u'\,(1 + \Delta u/\bar{u})$ bzw. $u_2' = u'\,u_2/\bar{u} = u'\,(1 - \Delta u/\bar{u})$ ist, folgt weiter bei Verwendung von (7) und (3)

$$\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\bar{u}} = \frac{k\,\Delta n\,\sqrt{\overline{i^2}}\,\sqrt{1 + \overline{u'^2}/\bar{u}^2 + 4\,\alpha\,\overline{u'^2}/a\,\bar{u}\,\Delta u}}{n\sqrt{\tfrac{1}{2}\,(\overline{i_1^2} + \overline{i_2^2}) - \overline{i^2}}} \quad \ldots \ldots \quad (12).$$

Da $\overline{u'^2}/\bar{u}^2$ wesentlich kleiner ist als 1, hat der dreigliedrige Wurzelausdruck im Zähler dieser Gleichung lediglich die Bedeutung eines Korrekturfaktors. Damit das Glied $4\,\frac{\alpha}{a}\,\frac{\overline{u'^2}}{\bar{u}\,\Delta u}$ vernachlässigt werden kann, muß man dafür sorgen, daß α möglichst klein und $\Delta u/\bar{u}$ möglichst groß wird, besonders für Punkte in der Nähe der Wand, wo $u'/\bar{u}$ stark ansteigt (siehe Abb. 1).

Aus versuchstechnischen Gründen wurde die direkte Eichung des Dynamometers vorgezogen. Ein Beobachter las das Dynamometer ab und überwachte mit einem elektrischen Tachometer die Drehzahl des Gebläses; ein anderer Beobachter überwachte den Verstärker und führte Protokoll.

Die Mittelwerte $\overline{i^2}$, $\overline{i_1^2}$ und $\overline{i_2^2}$ wurden aus je 50 bis 100 Meßdaten gebildet. Das zeitliche Intervall zwischen zwei Ablesungen betrug 10 Sekunden.

4. Ergebnis der Messungen. In Zahlentafel 1 sind die Meßdaten angegeben. In Abb. 1 ist $\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\bar{u}}$ als Funktion des Wandabstandes y aufgetragen, und Abb. 2 zeigt $\log\left(\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\bar{u}}\right)$ in Abhängigkeit von $\log(y/r)$ (r = Kanalhalbmesser). Für die Wandabstände $y = 1$; 2,3 und 4 liegen die Meßpunkte in Abb. 2 auf einer Geraden mit dem Gefälle 0,46 : 1. Der Meßpunkt für $y = 6$ liegt etwas oberhalb dieser Geraden und die Meßpunkte für $y = 0{,}4$ und $y = 8$ etwas unterhalb der Geraden. Das Abweichen von der Geraden kann aber nicht als „Streuung" bezeichnet werden. Sämtliche Punkte wurden mehrfach nachgemessen, und die nachgemessenen Werte unterscheiden sich nur unwesentlich von den hier angegebenen Werten. Die in Abb. 2 eingezeichnete Gerade entspricht der Funktion

$$\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\bar{u}}\left(\frac{y}{r}\right)^{0,46} = 0{,}056 \qquad (12).$$

Diese Funktion ist in Abb. 1 dargestellt, und zwar ist sie dort gestrichelt gezeichnet, wo die Meßpunkte nicht auf dieser Kurve liegen.

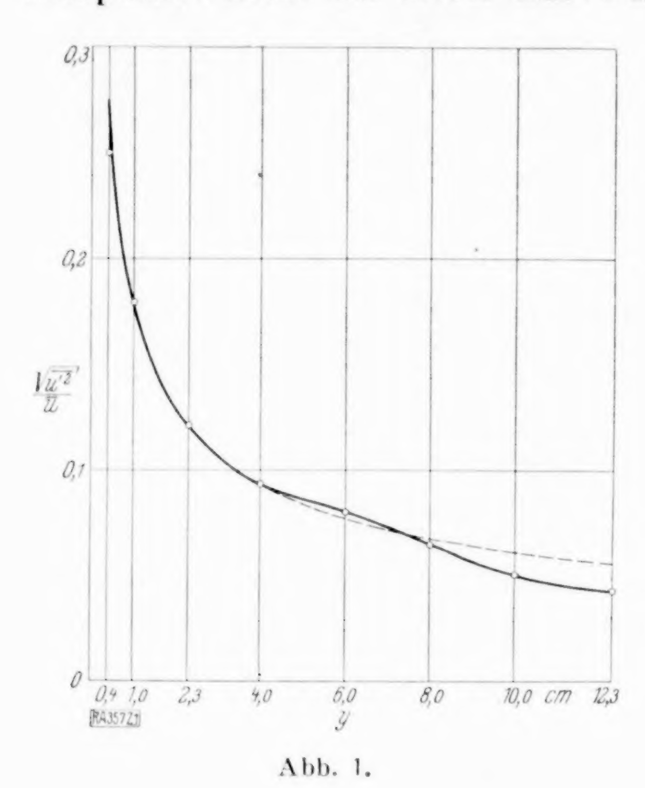


Abb. 1.

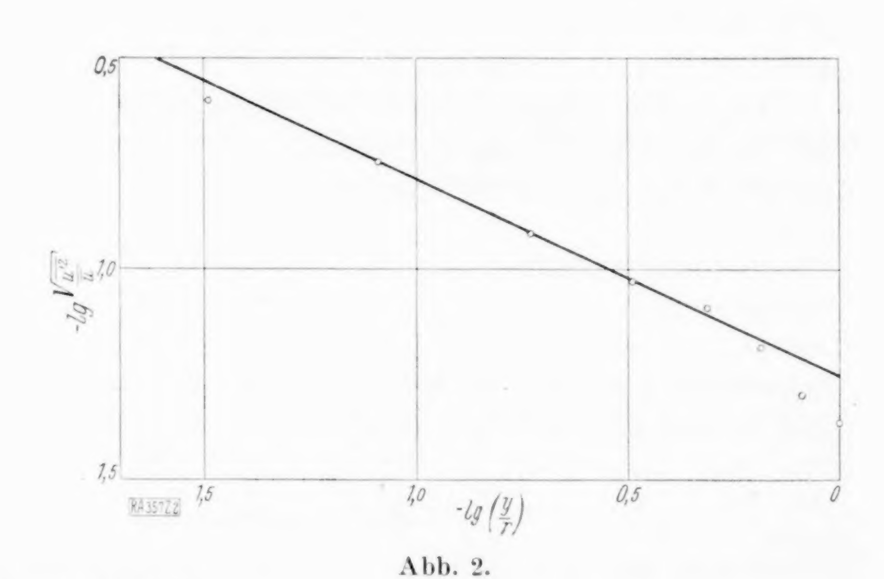


Abb. 2.

Zahlentafel 1.

y (cm)	k	$\frac{1}{2}(\overline{i_1^2} + \overline{i_2^2})$	$\overline{i^2}$	$\frac{\Delta n}{n}$	$\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\bar{u}}$	$-\log\left(\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\bar{u}}\right)$	$-\log\left(\frac{y}{r}\right)$
0,4	1,380	43,2	7,03	0,40	0,250	0,602	1,488
1,0	1,340	45,3	8,70	0,30	0,179	0,747	1,090
2,3	1,320	51,8	8,93	0,20	0,121	0,917	0,728
4,0	1,305	44,8	5,04	0,20	$0{,}093_5$	1,029	0,488
6,0	1,295	60,8	8,86	0,15	$0{,}080_5$	1,094	0,312
8,0	1,290	49,7	7,42	0,12	0,065	1,187	0,187
10,0	1,285	48,5	6,40	0,10	$0{,}050_5$	1,300	0,090
$r = 12{,}3$	1,280	51,9	5,22	0,10	0,043	1,367	0

5. Zusammenfassung. Mit einer Hitzdrahtapparatur wurden die quadratischen Mittelwerte der turbulenten Längsschwankungen in einem Luftkanal gemessen. Die Messungen zeigen, daß sich die funktionale Abhängigkeit dieser Schwankungen vom Wandabstand in der Nähe der Wand durch ein einfaches Potenzgesetz (12) näherungsweise darstellen läßt. 357

4. Grenzschichtabsaugung und Senkenwirkung.

Von *O. Schrenk* in Göttingen.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Durch geeignetes Absaugen geringer Flüssigkeitsmengen von der Oberfläche umströmter Körper lassen sich bekanntlich Strömungsformen erzwingen, die ohne besondere Maßnahmen nie auftreten können.

Die Theorie der Absaugewirkung ist zunächst die[1]): Die stark verzögerten Teile der Grenzschicht in einem Druckanstiegsgebiet werden, bevor sie die Ablösung der Gesamtströmung verursachen können, durch Absaugen entfernt, worauf sich eine neue Grenzschicht bildet, die von neuem einen bestimmten Druckanstieg überwinden kann (eigentliche „Grenzschichtabsaugung"). Die erforderliche Absaugemenge steht nach dieser Auffassung in einem, noch von den näheren Umständen abhängigen Verhältnis zu der in der Grenzschicht strömenden Menge.

Dieser Auffassung steht nun eine zweite gegenüber (Theorie der „Senkenwirkung"), die besagt, daß der Senkeneinfluß, d. h. die durch die Absaugung selbst bewirkte Änderung des Druckverlaufs an der Oberfläche, wesentlich am Zustandekommen der beabsichtigten Strömungsform beteiligt ist[2]).

Der Senkeneinfluß besteht in einer Abflachung der Druckanstiege vor und hinter dem Absaugeschlitz (es wird hier zunächst nur die diskontinuierliche Absaugung durch einzelne Schlitze betrachtet), die in nächster Schlitznähe sogar in Druckgefälle übergehen (s. die Abb. 1, in der die gemessene Druckverteilung mit Senkeneinfluß durch Kreise, die auf Grund der gemessenen Absaugemenge daraus berechnete Verteilung ohne Absaugung durch Kreuze gekennzeichnet ist). Er kommt zustande durch die Überlagerung der strahlenförmig zur Absaugestelle hin gerichteten Absaugeströmung über die ungefähr parallel zur Oberfläche verlaufende Grundströmung und läßt sich von ihr bei bekannter Absaugemenge rechnerisch nach dem Bernoullischen Gesetz trennen. Mit zunehmender Absaugemenge nimmt auch die Veränderung des Druckfeldes durch den Senkeneinfluß zu. Infolge des Senkeneinflusses wird der durch die Grenzschicht vor und hinter dem Schlitz zu überwindende Druckanstieg abgeflacht und im Gesamtbetrag geringer. Es ist ersichtlich, daß nach dieser Auffassung die erforderliche Absaugemenge zur Grenzschichtmenge in keinem unmittelbaren Verhältnis steht, die Absaugemenge muß vielmehr so groß gemacht werden, daß die beiden Druckanstiege — praktisch ist wohl meist der vordere maßgebend — gerade noch für die Entwicklung der Grenzschicht ohne Eintritt der Ablösung ertragbar sind. Ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Absaugetheorien ist der, daß die eigentliche Grenzschichtabsaugung nur nach hinten, also stromabwärts wirkt, während die Senkenwirkung nach vorne und nach hinten greift.

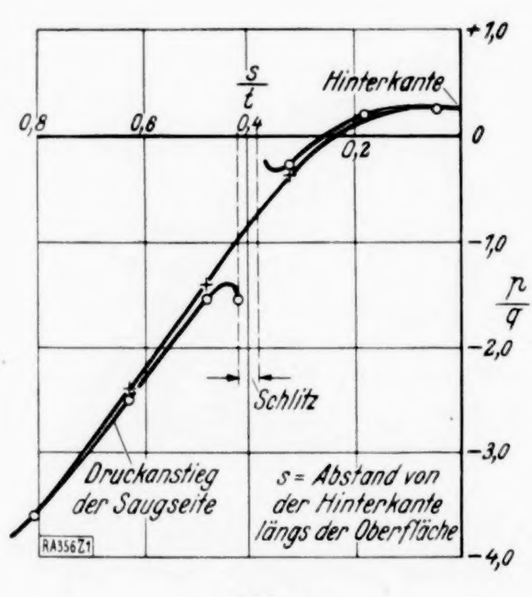


Abb. 1.

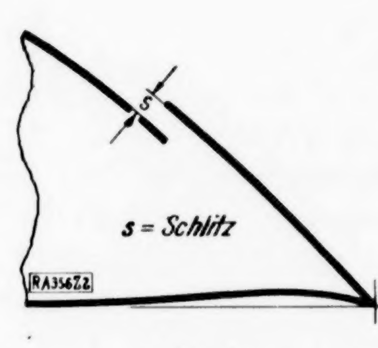


Abb. 2.

Im allgemeinen werden bei der Anwendung der Absaugung wohl beide Erscheinungen, die eigentliche Grenzschichtabsaugung und die Senkenwirkung, verkoppelt auftreten. Beide Auffassungen sind aber auch insofern berechtigt, als man für sie „eindeutige" Beispiele angeben kann, so für die Grenzschichtabsaugung einen Körper, dessen Oberfläche aus feinmaschigem Sieb oder poröser Masse besteht, und für die Senkenwirkung eine Absaugung am hinteren Ende des Druckanstiegs, wobei allerdings eine verhältnismäßig große Absaugemenge erforderlich ist.

Für die Praxis ist aber die Frage wesentlich, welche Erscheinung in den vorkommenden Fällen wichtiger ist, welche der beiden Auffassungen also sozusagen als Gebrauchstheorie geeigneter ist.

[1]) L. Prandtl: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung (1904). Neudruck: Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik. Göttingen (1927).

[2]) Erstmals ist der Gedanke der Senkenwirkung eingehend erörtert in einem Beitrag von Herrn Prof. Prandtl für ein noch unveröffentlichtes Sammelwerk und in einem gleichzeitig und unabhängig davon abgefaßten internen Bericht des Verfassers, beide aus dem Jahre 1930. Ähnliche Vermutungen, in denen allerdings der entscheidende Anteil der Grenzschicht nicht erkannt ist, sind auch schon anderweitig ausgesprochen worden.

Zu dieser Frage konnten einige Versuche ausgeführt werden, vor allem solche an einem sehr dicken Absaugeflügel mit der gleichen Profilform, wie bei der in der ZFM 1931 (22), S. 259 mitgeteilten Untersuchung.

Zunächst ist die Tatsache festgestellt worden, daß für bestimmte Schlitzlagen bei Änderung des Anstellwinkels bzw. des Auftriebes zwar der Druck in der Gegend des Absaugeschlitzes und dahinter sich nicht viel änderte, daß dabei aber die höchsten Saugspitzen in der Nähe der Profilnase und zugleich die erforderlichen Absaugemengen mit wachsendem Anstellwinkel sehr stark zunahmen. Offenbar hat sich also die Größe der Absaugemenge nur nach den Druckanstiegsverhältnissen vor dem Schlitz gerichtet, da hinter dem Schlitz für alle Anstellwinkel ungefähr gleiche Drücke herrschen. Diese Erscheinung ist mit der Theorie der Grenzschichtabsaugung nicht zu erklären, dagegen steht sie mit der Theorie der Senkenwirkung im Einklang.

Ein weiterer Versuch wurde mit einem Schlitz in nächster Nähe der Hinterkante ausgeführt. Die Absaugemenge war dabei zwar 2—3 mal so groß als bei weiter vorne gelegenen Schlitzen, aber die Absaugung war in der erwarteten Weise wirksam.

Besonders wichtig waren einige Versuche, bei denen die hintere Schlitzkante über die vordere überstand, wie Abb. 2 zeigt. Der Schlitz lag dabei, in der Projektion gemessen, etwa 20% der Tiefe von der Hinterkante entfernt. Ist hier die eigentliche Grenzschichtabsaugung maßgebend, so muß die erforderliche Absaugemenge von der Schlitzöffnung s, weitgehend unabhängig sein. Umgekehrt wird, wenn die Senkenwirkung entscheidend ist, mit wachsendem s die erforderliche Absaugemenge stark anwachsen, da keine Senkenwirkung zustande kommt, wenn die eingesaugte Luftschicht genau die Breite s besitzt, und da somit erst die darüber hinausgehenden Beträge im günstigen Sinne wirksam werden. Die Versuche bestätigten die zweite Betrachtung in vollem Umfang: maßgebend ist die Senkenwirkung. In kleineren Unterschieden zwischen den Ergebnissen bei verschiedenem s wird aber in geringerem Maße auch die Wirkung der Grenzschichtabsaugung spürbar. Bei weiter vorn gelegenen Schlitzlagen konnten gleiche Versuche nicht ausgeführt werden, so daß das Vorherrschen der Senkenwirkung nicht ganz allgemein sichergestellt ist.

Ähnliche Ergebnisse hat die Auswertung einiger Grenzschichtmessungen geliefert. Ist die Theorie der Senkenwirkung maßgeblich, so muß die wirkliche Grenzschicht am Scheitelpunkt der Druckkurve kurz vor dem Schlitz knapp vor dem Zustand der Ablösung sein, während sie in dem hypothetischen Fall ohne Senkeneinfluß (durchgezogene Druckkurve der Abb. 1) schon vor dem Schlitz zur Ablösung kommen würde. Zur Untersuchung dieser Frage diente die Auswertung einiger Grenzschichtmessungen nach dem von E. Gruschwitz entwickelten Berechnungsverfahren, das von einer gegebenen turbulenten Anfangsgrenzschicht aus die rechnerische Verfolgung der Grenzschicht hinsichtlich Dicke und Ablösungsgefahr ermöglicht[3]). Es ergab sich für eine Schlitzlage bei 20% von der Hinterkante (nicht übergreifende hintere Schlitzkante) das erwartete Verhalten: die wirkliche Grenzschicht ist kurz vor dem Zustand der Ablösung, die Grenzschicht aber, die ohne die Veränderung des Druckverlaufs durch die Senke vorhanden wäre, würde nach der Rechnung längst zur Ablösung der Strömung geführt haben. Weniger eindeutig ist das Verhalten bei der Schlitzlage 30% von der Hinterkante, so daß auch nach diesen Versuchen das Vorherrschen der Senkenwirkung nicht ganz allgemein sichergestellt ist.

Es sei noch erwähnt, daß auch bei anderen Versuchen, die noch nicht veröffentlicht werden können, mit Erfolg die Theorie der Senkenwirkung als Gebrauchstheorie zugrunde gelegt wurde.

Über diese Versuche sowie über die Einzelheiten zu den oben nur angedeuteten verschiedenen Versuchen soll in einer späteren Veröffentlichung ausführlicher berichtet werden.

Zusammenfassung. Zur Erklärung der durch die Absaugung erzielten Wirkungen können zwei Vorgänge herangezogen werden:

1. Die Wegnahme der „gefährlichen“ Teile der Grenzschicht, die eine Ablösung hervorrufen könnten (eigentliche „Grenzschichtabsaugung“).

2. Die Veränderung des Druckverlaufs entlang der Körperoberfläche in einem für die Entwicklung der Grenzschicht günstigen Sinne („Senkenwirkung“).

Beide Vorgänge treten verkoppelt auf, jedoch können sie auch sozusagen in Reinkultur vorkommen. Als Gebrauchstheorie für die Mehrzahl der praktisch vorkommenden Fälle scheint die Theorie der Senkenwirkung geeigneter zu sein, jedoch kann dies aus den bisher vorhandenen Ergebnissen nicht für alle praktischen Fälle mit Sicherheit behauptet werden. Sicher ist, daß im allgemeinen auch die eigentliche Grenzschichtabsaugung in geringerem Maße am Zustandekommen der Absaugewirkung beteiligt ist. 356

[3]) Ing. Arch. II (1931), S. 321 und ZFM 23 (1932), S. 368, Ergänzung durch noch unveröffentlichte Untersuchungen von H. Schmidbauer. Herrn Dr. Gruschwitz verdanke ich wertvolle Anregungen bei meiner Untersuchung.

HAUPTAUFSÄTZE

Erzwungene Schwingungen reibungsgekoppelter Schwingungssysteme.

Von *E. Hahnkamm* in Göttingen.

Einleitung: Erklärende Bemerkungen.

1. Anlaß zur Arbeit. In folgender Arbeit sollen zwei Schwingungssysteme behandelt werden, die durch Reibungskopplung miteinander verbunden sind. Um ein irgendwie periodisch erregtes System, z. B. ein störend schwingendes Maschinen- oder Fundamentteil, zu beruhigen, kann man es mit einem zweiten System koppeln. Man hat, um die störenden Schwingungen des erregten Systems möglichst stark zu dämpfen, die Kopplungsart, die Kopplungsstärke und das hinzugefügte System selbst in geeigneter Weise zu wählen. Grundsätzlich hat man drei Kopplungsarten zu unterscheiden: Die Kraftkopplung, die Trägheitskopplung und die Reibungskopplung. Bei der letzten Kopplungsart wird den Systemen Schwingungsenergie durch die Kopplung entzogen, bei den beiden ersten Kopplungsarten wird keine Schwingungsenergie aus dem Gesamtsystem abgeführt. Dies ist das wesentlich Unterschiedliche zwischen der Reibungskopplung und den beiden andern Kopplungsarten, welche in ihren Wirkungsweisen sehr verwandte Erscheinungen aufweisen, was hier ohne näheren Beweis angeführt sei. Solche gekoppelten Schwingungssysteme kommen in der Praxis z. B. häufig bei Meßinstrumenten vor. Man erstrebt durch die Kopplung des eigentlichen Meßinstrumentes mit einem zweiten, schwingungsfähigen System eine schnellere Beruhigung des Instrumentes. Auch Schiff und Schlingertank sind zwei solche gekoppelte Schwingungssysteme. Durch den Einbau eines Schlingertanks beabsichtigt man die Schwingungen des Schiffes um seine Längsachse zu dämpfen. Die Meinungsverschiedenheiten, die bislang über dieses gekoppelte Schwingungssystem in der Literatur herrschten, sind zum Teil ein Anlaß für diese Arbeit gewesen [1] [2]: Prof. Schuler vertritt die Auffassung, daß bei dem Schwingungssystem, Schiff — Schlingertank, die Reibungskopplung wesentlich zu der günstigen Wirkungsweise des Schlingertanks beiträgt, während man bisher in der Literatur und auch in der Praxis die Reibungskopplung in der Berechnung der Schlingertanks vernachlässigte und bestrebt war, bei der Konstruktion der Tanks die Reibungskopplung möglichst klein zu machen. Es erscheint für die Klärung der erwähnten verschiedenen Auffassungen angezeigt, zunächst einmal zwei Schwingungssysteme zu behandeln, welche nur reibungsgekoppelt sind. Die Reibungskraft ist proportional der Geschwindigkeit angenommen. Den folgenden Betrachtungen liegen durchweg Drehschwingungssysteme zugrunde. Indessen sei bemerkt, daß die gefolgerten Ergebnisse ohne weiteres auf Systeme mit geradlinigen Schwingungen übertragen werden können. Die zur Belegung der Theorie angestellten Versuche sind im Institut für angewandte Mechanik der Universität zu Göttingen ausgeführt worden.

Herrn Prof. Schuler bin ich für seine rege Anteilnahme am Fortschritt der Arbeit und für die vielen Mühen, denen er sich unterzog, um die gedanklichen und praktischen Schwierigkeiten der Arbeit zu überwinden, zu großem Dank verpflichtet.

2. Bedeutung der verwendeten Größen.

φ = Winkelausschlag des ersten Systems.
ψ = Winkelausschlag des zweiten Systems.
Θ_{I} = Trägheitsmoment des ersten Systems.
Θ_{II} = Trägheitsmoment des zweiten Systems.
c_{I} = Stabilitätsmoment des ersten Systems.
c_{II} = Stabilitätsmoment des zweiten Systems.
ν_{I} = Eigenschwingungszahl des ersten Systems, definiert durch die Beziehung: $\nu_{\mathrm{I}}^2 = \frac{c_{\mathrm{I}}}{\Theta_{\mathrm{I}}}$.
ν_{II} = Eigenschwingungszahl des zweiten Systems, definiert durch die Beziehung: $\nu_{\mathrm{II}}^2 = \frac{c_{\mathrm{II}}}{\Theta_{\mathrm{II}}}$.
P = Größe des erregenden Kraftmomentes.
ω = Periode des erregenden Kraftmomentes.
μ^2 = Verhältnis der Trägheitsmomente beider Systeme, definiert durch die Beziehung: $\mu^2 = \frac{\Theta_{\mathrm{II}}}{\Theta_{\mathrm{I}}}$ (dimensionslos).

[1] M. Schuler, Zweiter internationaler Kongreß für technische Mechanik, Zürich 1926.
[2] M. Schuler, Werft, Reederei, Hafen, IX. Jahrg. 1928, Heft 14.

δ = Verhältnis der Eigenfrequenzen der beiden Systeme, definiert durch die Beziehung: $\delta = \frac{\nu_{II}}{\nu_I}$ (dimensionslos).

γ = Verhältnis der Periode des erregenden Kraftmomentes zur Eigenschwingungszahl des ersten Systems, definiert durch die Beziehung: $\gamma = \frac{\omega}{\nu_I}$ (dimensionslos).

K = Koeffizient der Reibungskopplung beider Systeme.

k = bezogener Koeffizient der Reibungskopplung beider Systeme, definiert durch die Beziehung: $k = K \cdot \frac{\nu_I}{c_I}$ (dimensionslos).

A = Amplitude des ersten Systems.

B = Amplitude des zweiten Systems.

R_0 = Resonanzfunktion des ersten Systems ohne Kopplung.

R_{Ik} = Resonanzfunktion des ersten Systems bei Reibungskopplung.

R_{IIk} = Resonanzfunktion des zweiten Systems bei Reibungskopplung.

κ = Phasenverschiebung des ersten Systems gegen das erregende Kraftmoment.

η = Phasenverschiebung des zweiten Systems gegen das erregende Kraftmoment.

ε = Phasenverschiebung der beiden Systeme untereinander, definiert durch die Beziehung: $\varepsilon = \eta - \kappa$.

Alle vorkommenden Winkel sollen positiv gerechnet werden, wenn das System im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers ausschwingt.

3. Erzwungene Schwingungen eines ungekoppelten Systems. Um den Einfluß der Reibungskopplung auf die Schwingungssysteme besser erkennen zu können, sollen zunächst die erzwungenen Schwingungen eines ungekoppelten Systems behandelt werden. Dabei sollen gleich die Abkürzungen und Buchstaben eingeführt werden, die wir später benötigen.

Unter einem solchen ungekoppelten System kann man sich ein physisches Pendel vorstellen, welches durch ein äußeres Kraftmoment periodisch erregt wird. Auch eine Flüssigkeit, die sich frei beweglich in einem als feststehend anzusehenden U-förmigen Rohr befindet, soll nach unserer Festlegung ein ungekoppeltes Schwingungssystem darstellen.

Mathematisch wird ein solches ungekoppeltes Schwingungssystem, dessen Reibung vernachlässigt wird, und auf das ein äußeres Kraftmoment P mit der Periode ω wirkt, wenn man nur kleine Schwingungen betrachtet, durch folgende Gleichung wiedergegeben:

$$\Theta_I \ddot{\varphi} + c_I \varphi = P \cdot e^{i\omega t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Mittels des Ansatzes $\varphi = A \cdot e^{i\omega t}$ erhält man für die Amplitude die Gleichung:

$$A = \frac{P}{c_I} \cdot \frac{1}{1-\gamma^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Aus dieser Beziehung folgert man: Der Absolutwert der Amplitude ist umgekehrt proportional dem Stabilitätsmoment des ersten Systems und direkt proportional dem äußeren Kraftmoment und dem Ausdruck: $\frac{1}{1-\gamma^2}$. Diesen mathematischen Ausdruck wollen wir die Resonanzfunktion eines ungekoppelten Systems nennen und dafür abgekürzt schreiben: R_0, wo der Index 0 darauf hinweisen soll, daß im Gegensatz zu den späteren Resonanzfunktionen reibungsgekoppelter Systeme hierunter die Resonanzfunktion für die Kopplung Null gemeint ist. Bei vorgegebenem äußerem Kraftmoment wird also die Größe der Amplitude nur von der Frequenz des erregenden Kraftmomentes, die in γ eingeht, abhängen. Es genügt also im wesentlichen die Resonanzfunktion:

$$R_0 = \frac{1}{1-\gamma^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

zu erörtern.

Ist die erregende Frequenz $\omega = 0$, also $\gamma = 0$, so ist die Resonanzfunktion gleich 1. Die Amplitude ist also dann gleich der statischen Auslenkung des Systems, die durch ein dauernd wirkendes Kraftmoment P hervorgerufen würde (siehe Gl. 2). Man kann also die Resonanzfunktion als diejenige Zahl auffassen, mit der man den statischen Auslenkungswert multiplizieren muß, um die Größe der Amplitude der erzwungenen Schwingungen für eine beliebige Frequenz zu erhalten. Es soll uns im folgenden das Vorzeichen der Amplitude nicht interessieren, und wir wollen, wenn wir von der Größe der Amplitude sprechen, darunter ihren Absolutwert verstehen, vorausgesetzt, daß nicht ausdrücklich etwas anderes erwähnt ist. Trägt man den Absolutwert der Resonanzfunktion in Abhängigkeit von γ graphisch auf,

so erhält man eine Kurve, wie sie in Abb. 1 wiedergegeben ist. Für $\gamma = 0$ ist $R_0 = 1$. Mit $\gamma \to \infty$ geht $R_0 \to 0$. Für $\gamma = 1$ wird R_0 unendlich groß.

Der Gedankengang im folgenden ist nun der, daß man durch die Kopplung des Systems mit einem zweiten System das Unendlichwerden der Amplitude des ersten Systems zu vermeiden sucht. Dabei wird man darauf zu achten haben, daß die Amplitude des zweiten Systems durch die Einwirkung der Kopplungskräfte nicht zu groß wird. Denn praktisch darf eine gewisse Grenze nicht überschritten werden, und theoretisch ist bei Drehschwingungssystemen eine wesentliche Voraussetzung für die Gültigkeit der Differentialgleichungen, daß die Winkelausschläge genügend klein bleiben, damit der sinus durch den Winkel ersetzt werden kann.

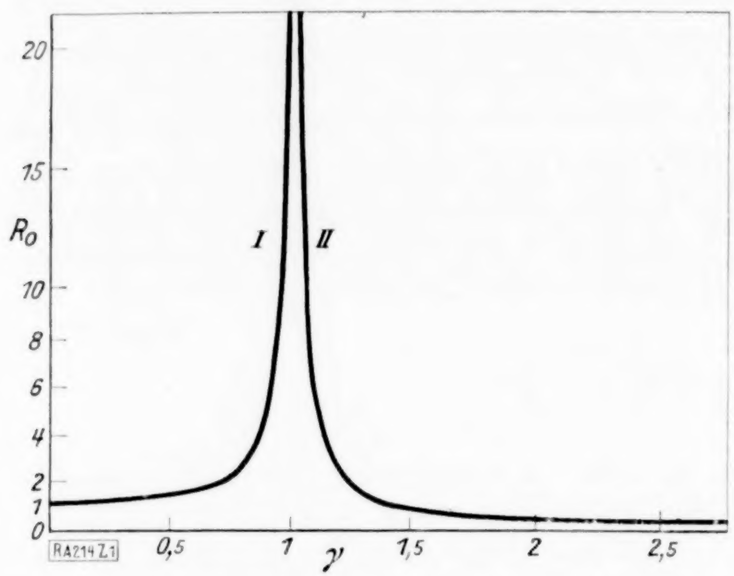


Abb. 1. Resonanzfunktion eines ungekoppelten Systems.

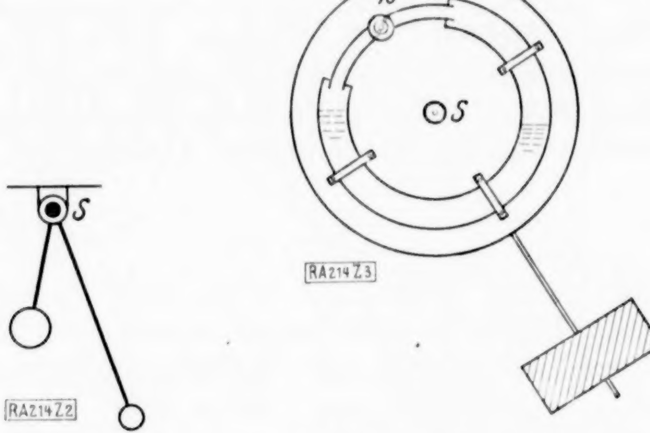


Abb. 2. Zwei reibungsgekoppelte Pendel.

Abb. 3. Reibungskopplung zwischen einem starren Pendel und einem Flüssigkeitspendel.

Hauptteil: Zwei reibungsgekoppelte Systeme.

1. Physikalische Beispiele. Es sollen nun zwei Schwingungssysteme betrachtet werden, welche durch Reibungskopplung verbunden sind. Dabei sei die Reibungskopplung proportional der Differenz der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Systeme angenommen. Es soll nur die Reibung der Systeme gegeneinander, also die Reibungskopplung, und nicht die Reibung der Systeme nach außen, die proportional den Winkelgeschwindigkeiten in Ansatz zu bringen wäre, berücksichtigt werden. Auf diese Weise tritt die Wirkung der Reibungskopplung am stärksten in Erscheinung.

Physikalisch kann man sich unter zwei solchen Schwingungssystemen zwei Pendel vorstellen, wie sie in Abb. 2 wiedergegeben sind. Die beiden Pendel schwingen um einen gemeinsamen Aufhängepunkt S und reiben sich irgendwie aneinander. Dabei ist ihre Reibung nach außen vernachlässigbar klein zu machen.

Eine weitere Verwirklichung zweier reibungsgekoppelter Schwingungssysteme stellt ein gewöhnliches, mechanisches Pendel dar, das mit einem Flüssigkeitspendel gekoppelt ist. In Abb. 3 ist ein solches Schwingungssystem wiedergegeben. Durch die eingezeichnete Drosselklappe k kann man zwischen beiden Pendeln eine Reibung einstellen. Wichtig bei dieser Anordnung ist, daß die Aufhängepunkte beider Pendel zusammenfallen; in der Abb. 3 ist es der Punkt S, daß ferner der Querschnitt (dessen Form natürlich beliebig sein kann) des Flüssigkeitsrohres konstant ist und daß dieses Flüssigkeitsrohr kreisförmig gebogen ist, da man es sonst im allgemeinen nicht mit reiner Reibungskopplung zu tun hat. Es sei wiederum nur Reibung der Systeme gegeneinander (proportinal zu $|\dot{\varphi} - \dot{\psi}|$), aber keine Reibung proportional zu $\dot{\varphi}$ bzw. $\dot{\psi}$ vorhanden.

2. Die mathematische Gleichung für zwei reibungsgekoppelte Systeme. Es sollen nunmehr die erzwungenen Schwingungen zweier solcher reibungsgekoppelter Schwingungssysteme behandelt werden. Auf das erste der beiden Systeme wirke ein äußeres Kraftmoment P mit der Frequenz ω. Mathematisch kann man zwei reibungsgekoppelte Schwingungssysteme wiedergeben durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_{\rm I}\,\ddot{\varphi} + c_{\rm I}\,\varphi + K(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) &= P \cdot e^{i\omega t} \\ \Theta_{\rm II}\,\ddot{\psi} + c_{\rm II}\,\psi + K(\dot{\psi} - \dot{\varphi}) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

3. Veranschaulichung der Größen und ihre Messung an den Beispielen. Um die Systemkonstanten zu veranschaulichen, möge ihre Bestimmung bei den erwähnten beiden Beispielen kurz angegeben werden.

Bei den Pendeln, wie sie Abb. 2 wiedergibt, mißt man das Stabilitätsmoment c_{I} des ersten Systems, indem man ein bekanntes Drehmoment auf dieses Pendel einwirken läßt und nach der Einstellung durch Messung des Ausschlages c_{I} errechnet. Ganz entsprechend bestimmt man c_{II}. Die Eigenschwingungszahlen der beiden Systeme werden gemessen, indem man die Kopplung aufhebt und die einzelnen Pendel unabhängig voneinander schwingen läßt. Damit hat man auch die Trägheitsmomente Θ_{I} und Θ_{II} der beiden Systeme; denn die gemessenen Eigenschwingungszeiten T_{I} und T_{II} hängen mit den Eigenschwingungzahlen der Systeme durch die einfache Beziehung $\nu = \frac{2\pi}{T}$ zusammen, und die Trägheitsmomente der beiden Schwingungssysteme lassen sich aus Eigenschwingungszahl und Stabilitätsmoment durch die bekannte Beziehung $\Theta = \frac{c}{\nu^2}$ berechnen. Die Stärke der Reibungskopplung läßt sich folgendermaßen bestimmen: Eins der beiden Pendel hält man dauernd fest, läßt das zweite schwingen und berechnet durch die Messung des Amplitudenabfalls das logarithmische Dekrement, woraus man dann die Kopplungsstärke errechnen kann; denn seien A_n und A_{n+1} zwei aufeinander folgende Ausschläge nach der gleichen Seite, so ist:

$$\ln A_n - \ln A_{n+1} = \frac{2\pi K}{\sqrt{4\,\Theta_{\mathrm{II}}\,c_{\mathrm{II}} - K^2}}.$$

Aus dieser Gleichung kann man K berechnen.

Beim zweiten angeführten Beispiel, welches in Abb. 3 dargestellt ist, mißt man einmal durch Absperren des Verbindungskanals der beiden Rohrenden und Auslenken des Gesamtsystems mittels eines bekannten Momentes $c_{\mathrm{I}} + c_{\mathrm{II}}$. Wenn man dann den Sperrhahn öffnet, mißt man nur noch c_{I}, wobei unter dem Flüssigkeitspendel das System II zu verstehen ist. Durch Differenzbildung hat man dann auch das Stabilitätsmoment c_{II} des Flüssigkeitspendels. Um die Eigenschwingungszahl des ersten Systems festzustellen, entfernt man die Flüssigkeit, stößt das erste System an und mißt die Schwingungszeit, womit man dann die Eigenschwingungszahl durch die erwähnte Beziehung $\nu = \frac{2\pi}{T}$ berechnet. Durch die Entfernung der Flüssigkeit ist die Reibungskopplung zu Null gemacht. Zur Messung der Eigenschwingungszahl des Flüssigkeitspendels hält man das erste System fest und stößt die Flüssigkeit irgendwie an. Durch Herausnehmen der Verschlußstopfen an den Rohrenden ist die Reibung möglichst klein zu machen. Aus der Eigenschwingungszahl T_{II} erhält man dann wieder die Eigenschwingungszahl ν_{II} durch die Beziehung $\nu_{\mathrm{II}} = \frac{2\pi}{T_{\mathrm{II}}}$. Dann hat man die Trägheitsmomente Θ_{I} und Θ_{II} der beiden Systeme mittels der Beziehung $\nu^2 = \frac{c}{\Theta}$. Die Stärke der Reibungskopplung bestimmt man wie bei Beispiel 1 dadurch, daß man das erste System festhält und durch Messung der Amplitudenabnahme der angestoßenen Flüssigkeit das logarithmische Dekrement ermittelt, woraus man den Kopplungskoeffizienten K wie unter Beispiel 1 errechnen kann. Übrigens kann man die Systemkonstanten des Flüssigkeitspendels aus den Dimensionen desselben sehr leicht angeben. Wenn der Querschnitt des Rohres mit Q, der Abstand des Aufhängepunktes S vom mittleren Stromfaden der Flüssigkeitssäule mit b und die Länge des Flüssigkeitsfadens mit L bezeichnet wird, so ist, wenn man die in Richtung von b gehende Ausdehnung des Rohres als klein gegen b annimmt, in erster Näherung:

$$c_{\mathrm{II}} = 2\gamma b^2 Q \qquad \Theta_{\mathrm{II}} = Q b^2 \frac{\gamma}{g} L,$$

wo mit γ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit und mit g die Erdschwere bezeichnet ist.

4. Die Aufstellung der Resonanzfunktionen. Zur weiteren mathematischen Behandlung der Gl. (4) kann man den Ansatz machen:

$$\varphi = A e^{i\omega t} \qquad \psi = B e^{i\omega t}.$$

Für die Amplituden erhält man die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A &= P \cdot \frac{c_{\mathrm{II}} - \Theta_{\mathrm{II}}\omega^2 + K i \omega}{(c_{\mathrm{I}} - \Theta_{\mathrm{I}}\omega^2 + K i \omega)(c_{\mathrm{II}} - \Theta_{\mathrm{II}}\omega^2 + K i \omega) + K^2\omega^2} \\ B &= P \cdot \frac{K i \omega}{(c_{\mathrm{I}} - \Theta_{\mathrm{I}}\omega^2 + K i \omega)(c_{\mathrm{II}} - \Theta_{\mathrm{II}}\omega^2 + K i \omega) + K^2\omega^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (5).$$

Für die Quadrate der Absolutwerte der Amplituden erhält man:

$$|A|^2 = \frac{P^2}{c_I^2} \cdot \frac{\mu^4 (\delta^2 - \gamma^2)^2 + k^2 \gamma^2}{\mu^4 [(1 - \gamma^2)(\delta^2 - \gamma^2)]^2 + \gamma^2 k^2 [(1 - \gamma^2) + \mu^2 (\delta^2 - \gamma^2)]^2}$$

$$|B|^2 = \frac{P^2}{c_I^2} \cdot \frac{k^2 \gamma^2}{\mu^4 [(1 - \gamma^2)(\delta^2 - \gamma^2)]^2 + \gamma^2 k^2 [(1 - \gamma^2) + \mu^2 (\delta^2 - \gamma^2)]^2} \, .$$

Die Erklärung der eingeführten Abkürzungen ist unter „Bedeutung der verwendeten Größen" gegeben. Für die obigen Gleichungen kann man setzen:

$$|A|^2 = \frac{P^2}{c_I^2} \cdot R_{Ik}^2 \qquad |B|^2 = \frac{P^2}{c_I^2} \cdot R_{IIk}^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

Darin bedeuten: R_{Ik} die Resonanzfunktion des ersten Systems und R_{IIk} die Resonanzfunktion des zweiten Systems bei vorhandener Reibungskopplung. Die Amplituden der beiden Systeme sind also direkt proportional der Größe der erregenden Kraft und ihrer zugehörigen Resonanzfunktion und sie sind umgekehrt proportional dem Stabilitätsmoment des ersten Systems. Man kann sich, wenn man die Größe des Kraftmomentes und das Stabilitätsmoment des ersten Systems als gegeben annimmt, wie es in praktischen Fällen allgemein zu sein pflegt, auf die Erörterung der beiden Resonanzfunktionen beschränken. Diese sind definiert durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} R_{Ik}^2 &= \frac{\mu^4 (\delta^2 - \gamma^2)^2 + \gamma^2 k^2}{\mu^4 [(1 - \gamma^2)(\delta^2 - \gamma^2)]^2 + \gamma^2 k^2 [\mu^2 (\delta^2 - \gamma^2) + (1 - \gamma^2)]^2} \\ R_{IIk}^2 &= \frac{\gamma^2 k^2}{\mu^4 [(1 - \gamma^2)(\delta^2 - \gamma^2)]^2 + \gamma^2 k^2 [\mu^2 (\delta^2 - \gamma^2) + (1 - \gamma^2)]^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

5. Verhalten der Resonanzfunktionen in den Grenzfällen. Um die Resonanzfunktionen auf ihre Richtigkeit zu prüfen, mögen folgende Grenzbetrachtungen angestellt werden:

1. Grenzwerte von k. Die Resonanzfunktionen müssen, wenn man die Kopplung immer schwächer werden läßt, gegen die Funktionen für ein ungekoppeltes System streben. Aus den Gl. (7) folgt mit $k \to 0$:

$$R_{Ik}^2 \xrightarrow[k \to 0]{} \frac{1}{(1 - \gamma^2)^2} \qquad R_{IIk}^2 \xrightarrow[k \to 0]{} 0 \, .$$

Macht man die Reibungskopplung immer stärker, so wird schließlich die Bewegung der beiden Systeme gegeneinander aufhören, und man hat die gleichen physikalischen Verhältnisse wie bei einem einzelnen Schwingungssystem.

Mit $k \to \infty$ streben:

$$R_{Ik}^2 \xrightarrow[k \to \infty]{} \frac{1}{[\mu^2 (\delta^2 - \gamma^2) + (1 - \gamma^2)]^2} \qquad R_{IIk}^2 \xrightarrow[k \to \infty]{} \frac{1}{[\mu^2 (\delta^2 - \gamma^2) + (1 - \gamma^2)]^2} \, .$$

Man hat also wieder ein einzelnes System, das sich aus den beiden gekoppelten zusammensetzt. Die Trägheitsmomente der Einzelsysteme addieren sich und auch die Stabilitätsmomente. Das Gesamtsystem hat eine Eigenschwingungszahl, die man aus der Nullstelle des Nenners leicht ermittelt: $\gamma^2_{k=\infty} = \dfrac{1 + \mu^2 \delta^2}{1 + \mu^2}$.

2. Grenzwerte von μ. Ein weiteres Ergebnis, das aus den Gl. (7) folgen muß, ist folgendes: Wenn man das zweite System immer kleiner werden läßt, so wird es schließlich keinen Einfluß auf das erste System mehr ausüben. Das erste System wird so schwingen, als ob es gar nicht gekoppelt wäre, und das zweite System schwingt genau so wie das erste. Wird das zweite System sehr klein, so heißt das, μ wird sehr klein. Mit $\mu \to 0$ streben:

$$R_{Ik}^2 \xrightarrow[\mu \to 0]{} \frac{1}{(1 - \gamma^2)^2} \qquad R_{IIk}^2 \xrightarrow[\mu \to 0]{} \frac{1}{(1 - \gamma^2)^2} \, .$$

Weiter erwartet man, wenn man das zweite System immer größer werden läßt, das heißt μ gegen ∞ gehen läßt, daß das erste System wenig erregt wird, und zwar um so weniger, je stärker es mit dem zweiten System gekoppelt ist. Und das zweite System wird wegen seiner Größe vollkommen ruhig bleiben. Es sei allerdings bemerkt, daß es einen Fall gibt, für den auch das zweite System trotz seiner Größe sehr stark erregt werden kann (darüber siehe unter: Versagerfälle).

Aus den Gl. (7) folgt mit $\mu \to \infty$:

$$R_{\mathrm{I}}k^2 \xrightarrow[\mu \to \infty]{} \frac{1}{(1-\gamma^2)^2+\gamma^2 k^2} \qquad R_{\mathrm{II}}k \xrightarrow[\mu \to \infty]{} 0,$$

vorausgesetzt $\delta \neq 1$ (siehe Versagerfälle).

3. Grenzwerte von δ. Macht man δ sehr klein, so folgt aus den Gl. (7):

$$R_{\mathrm{I}}k^2 \xrightarrow[\delta \to 0]{} \frac{\mu^4\gamma^2+k^2}{\mu^4(1-\gamma^2)^2\cdot\gamma^2+k^2[1-\gamma^2(1+\mu^2)]^2} \qquad R_{\mathrm{II}}k^2 \xrightarrow[\delta \to 0]{} \frac{k^2}{\mu^4(1-\gamma^2)^2\cdot\gamma^2+k^2[1-\gamma^2(1+\mu^2)]^2}.$$

Physikalisch bedeutet nach der Definition von $\delta = \frac{\nu_{\mathrm{II}}}{\nu_{\mathrm{I}}}$ $\delta \to 0$, daß ν_{II} gegen Null strebt, also das zweite System sehr langsam schwingt. Bei den beiden Pendeln der Abb. 2 erreicht man dieses, indem man das Stabilitätsmoment des zweiten Pendels sehr klein macht. Bei den Pendeln der Abb. 3 wird die Schwingungszeit des zweiten Pendels sehr groß, wenn man das Rohr ganz mit der Flüssigkeit anfüllt, sie ist, wenn das Rohr vollkommen gefüllt ist, sogar unendlich groß, da dann das Stabilitätsmoment des zweiten Pendels Null ist.

Umgekehrt folgt aus den Gl. (7), wenn man $\delta \to \infty$ gehen läßt

$$R_{\mathrm{I}}k^2 \xrightarrow[\delta \to \infty]{} \frac{1}{(1-\gamma^2)^2+\gamma^2 k^2} \qquad R_{\mathrm{II}}k^2 \xrightarrow[\delta \to \infty]{} 0.$$

Physikalisch bedeutet $\delta \to \infty$, ν_{II} wird sehr groß, also das zweite System schwingt sehr schnell. Bei den Pendeln der Abb. 2 erreicht man dieses, indem man das Stabilitätsmoment des zweiten Pendels groß und sein Trägheitsmoment möglichst klein macht. Praktisch ist man an die Verhältnisse natürlich sehr gebunden. Bei den Pendeln der Abb. 3 wird das Flüssigkeitspendel um so schneller schwingen, je kürzer der Flüssigkeitsfaden ist. Auch hier erreicht man nur endlich große Werte von δ (hierzu siehe auch unter: „Zwei Anwendungsbeispiele der Reibungskopplung").

4. Grenzwerte von γ. Als letzten Grenzfall mögen die extremen Werte von $\gamma = \frac{\omega}{\nu_{\mathrm{I}}}$ betrachtet werden. Aus Gl. (7) folgt mit $\gamma \to 0$:

$$R_{\mathrm{I}}k^2 \xrightarrow[\gamma \to 0]{} 1 \qquad R_{\mathrm{II}}k^2 \xrightarrow[\gamma \to 0]{} 0.$$

Physikalisch heißt $\gamma \to 0$, daß das Kraftmoment dauernd wirkt. Das erste System wird um einen konstanten Betrag ausgelenkt, der nur von der Größe des Kraftmomentes und des Stabilitätsmomentes des ersten Systems abhängt, völlig unabhängig aber sein muß von den Dimensionen des zweiten Systems und der Stärke der Reibungskopplung. Das zweite System darf dabei nicht ausgelenkt werden. Diese Erwartungen stimmen mit dem obigen Ergebnis überein, wie ein Blick auf die Gl. (6) zeigt. Nimmt die Frequenz des erregenden Kraftmomentes einen sehr großen Wert an, das heißt geht γ gegen unendlich, so folgt für die Resonanzfunktionen aus den Gl. (7):

$$R_{\mathrm{I}}k^2 \xrightarrow[\gamma \to \infty]{} 0 \qquad R_{\mathrm{II}}k^2 \xrightarrow[\gamma \to \infty]{} 0.$$

Da die Amplituden, wie aus den erwähnten Gl. (6) ersichtlich, den Resonanzfunktionen direkt proportional sind, werden die Amplituden beider Systeme unendlich klein, wenn die Frequenz des erregenden Systems unendlich groß wird. Physikalisch bedeutet dieses, das Kraftmoment übt keinen Einfluß mehr auf die Schwingungssysteme aus. Dem häufigen Drehrichtungswechsel können die Schwingungssysteme wegen ihrer mechanischen Trägheit nicht mehr folgen. Es ist dies ein ganz entsprechender Fall, wie er in der Elektrotechnik vorliegt, wenn man einen Wechselstrom mit einem Drehspulgalvanometer messen würde.

6. Erörterung der Resonanzfunktionen. Es sollen nunmehr die Resonanzfunktionen in ihrer Abhängigkeit von den verschiedenen Größen näher betrachtet werden. In der Praxis ist die erregende Frequenz die willkürliche variable Größe, während die Systemkonstanten zwar auch jede beliebige, praktisch erreichbare Größe annehmen können, aber nach ihrer Festlegung als Konstante anzusehen sind. Deswegen sollen die Resonanzfunktionen als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen γ aufgefaßt werden, und die Systemkonstanten sollen die Rolle von Parametern der Funktionen spielen. Wir tragen also γ als Abszisse auf und den Absolutwert der Resonanzfunktion als Ordinate. Da es physikalisch keinen Sinn hat, von negativen Frequenzen zu sprechen, sollen die Resonanzfunktionen nur entlang der positiven Abszissenachse betrachtet werden. Wie sich zeigen wird, tritt γ in allen behandelten Resonanzfunktionen nur quadratisch auf, so daß die Resonanzfunktionen zur Ordinatenachse

symmetrische Funktionen darstellen. Daher werden die Ergebnisse durch die alleinige Betrachtung des Kurvenastes mit positiver Abszisse auch mathematisch nicht unvollständig. Wie schon erwähnt, interessiert im allgemeinen nicht das Vorzeichen der Amplitude, also auch nicht das Vorzeichen der Resonanzfunktion. Deshalb wollen wir uns die Betrachtung noch dadurch vereinfachen, daß wir nur den Absolutwert auftragen. Die Gl. (7) geben wegen ihrer quadratischen Form auch nur Absolutwerte an. Wo aber das Vorzeichen von Bedeutung ist, muß man auf die Gl. (5) zurückgreifen.

Es werfen sich nunmehr folgende Fragen auf: Wie hat man die zur Verfügung stehenden Systemkonstanten δ und μ zu wählen, um eine möglichst günstige Einwirkung des hinzugefügten zweiten Systems auf das erregte, erste System zu erzielen. Kann man Gefahr laufen, den eigentlichen Zweck der Kopplung, nämlich die Beseitigung der Resonanzstelle beim ersten System für $\gamma = 1$, durch eine gewisse, ungeeignete Wahl der Systemkonstanten zunichte zu machen? Kann man durch Einstellung einer bestimmten Kopplungsstärke k es dahin bringen, daß jeder andere Wert der Reibungskopplung ein Größerwerden des absoluten Maximums der Funktionskurven zur Folge hat? Zunächst sollen ganz allgemeine Ergebnisse, die unmittelbar aus den Gl. (7) gefolgert werden können, angeführt werden. Aus den Ergebnissen wird sich dann die weitere Behandlungsmethode ergeben.

Aus den Gl. (7) folgt:

1. Die Nenner der Resonanzfunktionen beider Systeme sind gleich.

2. Die Resonanzfunktionen der beiden Systeme sind gleich in dem Falle, daß die erregende Frequenz mit der Eigenschwingungszahl des zweiten Systems übereinstimmt. In allen anderen Fällen ist die Resonanzfunktion des zweiten Systems kleiner als die des ersten Systems.

3. Die Resonanzfunktionen beider Systeme sind stets von Null verschieden, wenn man die Grenzfälle $k = 0$ oder $\gamma = 0$ ausschließt.

4. Der Nenner der Resonanzfunktionen stellt die Summe zweier Quadrate dar und wird gleich Null, wenn beide Quadrate gleichzeitig Null werden, dann werden die Resonanzfunktionen unendlich. Hierzu siehe unter Versagerfälle.

5. Die Resonanzfunktionen beider Systeme sind im allgemeinen mit dem Koeffizienten der Reibungskopplung veränderlich.

7. Versagerfälle. Unter einem Versagerfall soll verstanden werden, daß die Systemkonstanten so ungeeignet gewählt wurden, daß trotz der Kopplung die Amplitude des erregten Systems für eine bestimmte Frequenz unendlich groß wird.

Aus den Gl. (7) folgt, daß die Zähler beider Resonanzfunktionen stets größer als Null sind, wenn man die Grenzfälle $\gamma = 0$ oder $k = 0$ ausschließt. Der Nenner der beiden Resonanzfunktionen kann unter Umständen Null werden, nämlich dann, wenn die beiden Quadrate im Nenner gleichzeitig Null werden. Man bestätigt an Hand der Gl. (7), daß ein solches gleichzeitiges Nullwerden der beiden Quadrate des Nenners, dann und nur dann eintritt, wenn $\delta = 1$ ist, das heißt, wenn die beiden Systeme gleiche Schwingungszeiten haben. Und zwar werden die Quadrate Null für $\gamma = \delta = 1$. Die beiden Systeme schwingen also theoretisch unendlich stark für die gleiche erregende Frequenz, für welche das ungekoppelte System mit dem erregenden Kraftmoment resoniert. Für $\delta = 1$ tritt der Versager auf, ganz gleichgültig, wie fest die beiden Systeme aneinander gekoppelt sind und gleichgültig wie groß das zweite System ist. Diesen Versager hat zuerst M. Schuler festgestellt (siehe Fußnote 1).

In Abb. 4 ist eine Versagerkurve des ersten Systems für verschiedene Werte der Kopplungsstärke gezeichnet worden. Der Kopplungsfaktor k wächst in Richtung der Kurven I bis VI. Für die Kurve I ist $k = 0$, für die Kurve VI ist $k = \infty$. Man sieht, die Breite der Resonanzstelle wird mit wachsendem Kopplungskoeffizienten immer kleiner und strebt mit $k \to \infty$ einem Grenzwert zu. Diese Grenzkurve ist eine normale Resonanzkurve eines ungekoppelten Systems mit dem Stabilitätsmoment $c_I + c_{II}$ und dem Trägheitsmoment $\Theta_I + \Theta_{II}$.

In Abb. 7 ist eine Versagerkurve des zweiten Systems für verschiedene Werte der Kopplungsstärke aufgetragen worden. Hier liegen die Verhältnisse umgekehrt. Mit wachsendem k, k wächst in Richtung der Kurven I ($k = 0$) bis VII ($k = \infty$), wird die Resonanzstelle immer breiter und strebt mit $k \to \infty$ gegen die gleiche Grenzkurve, gegen die das erste System mit $k \to \infty$ strebt. Mit $k \to 0$ artet die Resonanzkurve des zweiten Systems zu einem Strich aus, die Resonanzfunktion des zweiten Systems ist überall Null und für $\gamma = 1$ ist sie unstetig.

8. Die Frequenzen des erregenden Kraftmomentes, für welche die Resonanzfunktionen unabhängig sind von der Stärke der Reibungskopplung. Die Resonanzfunktionen Gl. (7) sind im allgemeinen nicht unabhängig von dem Wert der Reibungskopplung. Die Resonanzfunk-

tionen haben die Form: $R_k^2 = \frac{a^2 + b^2 k^2}{c^2 + d^2 k^2}$, wo a, b, c, d unabhängig von k sind. Für die Unabhängigkeit dieses Ausdruckes von k hat man die Bedingung:

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Für die Resonanzfunktion des ersten Systems folgt aus dieser Beziehung:

Die Determinante ist Null, wenn:

$$\gamma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8a)$$

ist. Das heißt, der Wert der Resonanzfunktion ist bei einer statischen Auslenkung unabhängig von der Stärke der Reibungskopplung, und das erwartet man auch. Denn physikalisch bedeutet dies: Man erhält bei den oben angeführten, durch die Abb. 2 und Abb. 3 dargestellten, reibungsgekoppelten Schwingungssystemen bei statischer Auslenkung des ersten Systems für gleiche Drehmomente Ausschläge, die unabhängig von der Stärke der Reibungskopplung sind, vorausgesetzt, daß man die völlige Einstellung abwartet.

Ferner ist die Gl. (8) erfüllt, wenn $(\delta^2 - \gamma^2)^3 = 0$ ist. Wenn also:

$$\gamma = \gamma_N = \delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8b)$$

ist. Für die Abszisse $\gamma = \gamma_N = \delta$ ist die Resonanzfunktion des ersten Systems also ebenfalls unabhängig von der Reibungskopplung. Die Wurzel $\gamma = \gamma_N = \delta$ ist eine dreifache der Gl. (8). Schließlich ist die Gl. (8) erfüllt, wenn:

$$\gamma^2 = \gamma_H^2 = \frac{\mu^2 \delta^2 + 2}{\mu^2 + 2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8c)$$

ist. Als Ergebnis dieser Betrachtungen hat man also: Für die Abszissen

$$\gamma = 0 \qquad \gamma_N = \delta \qquad \gamma_H^2 = \frac{\mu^2 \delta^2 + 2}{\mu^2 + 2}$$

ist die Resonanzfunktion des ersten Systems unabhängig von der Stärke der Reibungskopplung. Es behält die Resonanzfunktion ihre Werte für diese Abszissen bei, auch wenn $k = 0$ ist. Man kann also die Werte der Resonanzfunktion des ersten Systems bei Reibungskopplung für diese Abszissen ermitteln, indem man in die Resonanzfunktion eines ungekoppelten Systems für die Abszissen die obigen Werte einsetzt. Es ist:

$$R_0(\gamma = 0) = 1 \qquad R_0(\gamma = \gamma_N) = \frac{1}{1 - \delta^2} \qquad R_0(\gamma = \gamma_H) = \frac{\mu^2 + 2}{\mu^2 (1 - \delta^2)} \quad \ldots \quad (9).$$

Für den Verlauf der Funktionskurve des ersten Systems bei Reibungskopplung hat man also folgende Anhaltspunkte: Die Kurve geht durch die drei Punkte mit den Koordinaten

$$\gamma = 0, \quad R_{1k} = 1; \quad \gamma = \delta, \quad R_{1k} = \frac{1}{1 - \delta^2}; \quad \gamma^2 = \frac{\mu^2 \delta^2 + 2}{\mu^2 + 2}, \quad R_{1k} = \frac{\mu^2 + 2}{\mu^2 (1 - \delta^2)};$$

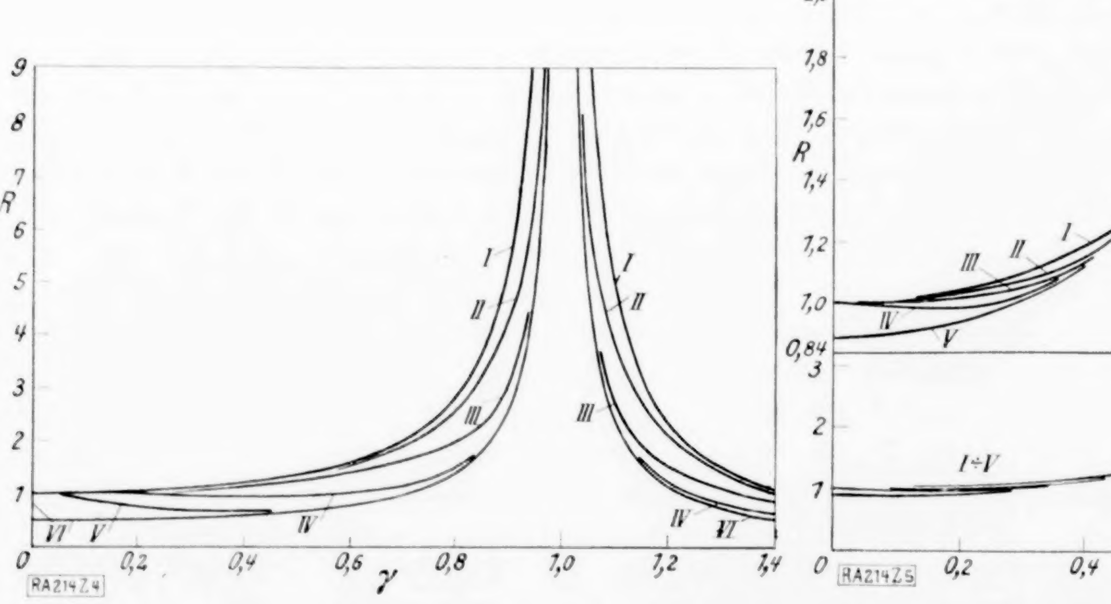


Abb. 4. Resonanzkurven des ersten Systems im Versagerfall ($\delta = 1$) für verschiedene Werte des Kopplungskoeffizienten.

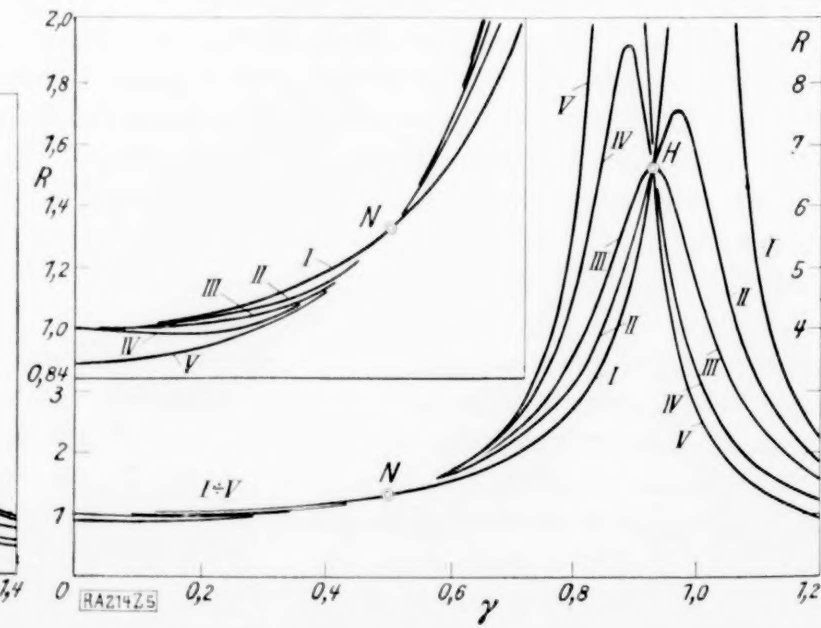


Abb. 5. Resonanzkurven des ersten Systems im Falle $\delta < 1$ für verschiedene Werte des Kopplungskoeffizienten.

und zwar für jeden beliebigen Wert des Kopplungskoeffizienten. Außerdem folgt daraus, daß der Nenner der Resonanzfunktion Gl. (7) von höherer Ordnung mit γ unendlich groß wird als der Zähler, daß die Resonanzfunktion sich bei größerwerdendem γ immer mehr der Abszissenachse nähert. Die ermittelten, näher interessierenden Festpunkte sollen wie folgt bezeichnet werden:

Der Festpunkt mit den Koordinaten:

$$\gamma = \delta \qquad R_{\mathrm{I}k} = \frac{1}{1-\delta^2} \qquad \text{mit } N.$$

Der Festpunkt mit den Koordinaten:

$$\gamma^2 = \frac{\delta^2 \mu^2 + 2}{\mu^2 + 2} \qquad R_{\mathrm{I}k} = \frac{\mu_2 + 2}{\mu^2 (1-\delta^2)} \qquad \text{mit } H.$$

Für die Resonanzfunktion des zweiten Systems folgt aus Gl. (8): Die Determinante ist Null, wenn $\mu = \infty$ ist. Das bedeutet aber für μ einen Grenzwert, der schon unter den Grenzfällen erörtert worden ist und nichts wesentlich Neues liefert. Die Funktion ist ferner unabhängig von k für $\gamma = 0$, dann ist $R_{\mathrm{II}k} = 0$. Physikalisch ist dies Ergebnis einleuchtend. Denn $\gamma = 0$ heißt ja, das Kraftmoment wirkt dauernd. Lenkt man das erste Pendel der in Abb. 2 und Abb. 3 dargestellten Schwingungssysteme mittels eines konstanten Drehmomentes aus, so wird das zweite System nicht ausgelenkt, wie es das theoretische Ergebnis auch fordert. Dieses Kriterium kann man zur Unterscheidung von Reibungskopplung und Kraftkopplung anwenden[3]). Die Gl. (8) ist schließlich erfüllt, wenn $\gamma = 1$ oder wenn $\gamma = \delta$ ist. Wir haben also das Ergebnis: für die Abszissen

$$\gamma = 0 \quad \gamma_N = \delta \quad \gamma_h = 1 \qquad \text{(10)}$$

ist die Resonanzfunktion des zweiten Systems unabhängig von der Stärke der Reibungskopplung. Man kann die Ordinaten dieser Festpunkte leicht ermitteln, indem man die Abszissen in die Resonanzfunktion des zweiten Systems einsetzt. Es ist:

$$R_{\mathrm{II}k}(\gamma = 0) = 0 \qquad \text{(11a)},$$

$$R_{\mathrm{II}k}(\gamma = \gamma_N) = \frac{1}{1-\delta^2} \qquad \text{(11b)},$$

$$R_{\mathrm{II}k}(\gamma = \gamma_h) = \frac{1}{\mu^2(1-\delta^2)} \qquad \text{(11c)}.$$

Die näher interessierenden Festpunkte sollen wie folgt bezeichnet werden:

Der Festpunkt mit den Koordinaten

$$\gamma = \delta \qquad R_{\mathrm{II}k} = \frac{1}{1-\delta^2} \qquad \text{mit } N.$$

Der Festpunkt mit den Koordinaten

$$\gamma = 1 \qquad R_{\mathrm{II}k} = \frac{1}{\mu^2(1=\delta^2)} \qquad \text{mit } h.$$

Wie man durch Vergleich feststellt, ist der Festpunkt N der Resonanzfunktion des zweiten Systems identisch mit dem Festpunkt N der Resonanzfunktion des ersten Systems, daher ist die Bezeichnung auch gleich gewählt worden. Für den Verlauf der Funktionskurven des zweiten Systems kann man folgendes aussagen: Alle Kurven beginnen im Nullpunkt des Koordinatensystems. Alle Kurven gehen durch die Festpunkte N und h. Im Festpunkt N berührt die Funktionskurve des zweiten Systems diejenige des ersten Systems. Alle Kurven des zweiten Systems gehen mit wachsendem γ gegen die Abszissenachse, weil der Nenner der Resonanzfunktion des zweiten Systems mit wachsendem γ von höherer Ordnung unendlich wird als der Zähler.

In Abb. 5 ist eine Funktionskurve des ersten Systems für ein $\delta < 1$ aufgetragen, in Abb. 6 eine solche für ein $\delta > 1$. Man sieht: In beiden Festpunkten schneiden sich alle Kurven. H und N müssen Schnittpunkte und keine Berührungspunkte sein, denn die Wurzel $\gamma = \gamma_H$ ist eine einfache Wurzel und die Wurzel $\gamma = \gamma_N$ ist eine dreifache Wurzel der Gl. (8).

In Abb. 8 ist eine Funktionskurve des zweiten Systems für ein $\delta < 1$ aufgetragen und in Abb. 9 eine solche für ein $\delta > 1$. Man sieht: In beiden Festpunkten berühren sich alle Kurven. Und dies muß auch so sein, denn beide Wurzeln sind zweifache Wurzeln der Gl. (8).

[3]) M. Schuler, Zeitschrift für technische Physik, X. Jahrgang 1929, Nr. 9.

9. Die Lage der Festpunkte. Erstes System: Man kann über die Lage der beiden Festpunkte N und H der Resonanzfunktion des ersten Systems folgendes aussagen: Beide Festpunkte liegen auf der Funktionskurve eines ungekoppelten Systems. Man folgert weiter aus den Beziehungen (8b), (8c), (9b), (9c): Für $\delta = 1$ haben beide Festpunkte die gleiche Abszisse $\gamma = 1$. Für $\delta < 1$ liegen beide Festpunkte auf dem Kurvenast ($\gamma < 1$) der Resonanzfunktion eines ungekoppelten Systems, wie sie in Abb. 1 wiedergegeben ist. Für $\delta > 1$ liegen beide Festpunkte auf dem Kurvenast ($\gamma > 1$) der Funktionskurve eines ungekoppelten Systems. Es ist stets die Ordinate von dem Festpunkt H größer als diejenige des Festpunktes N. Es

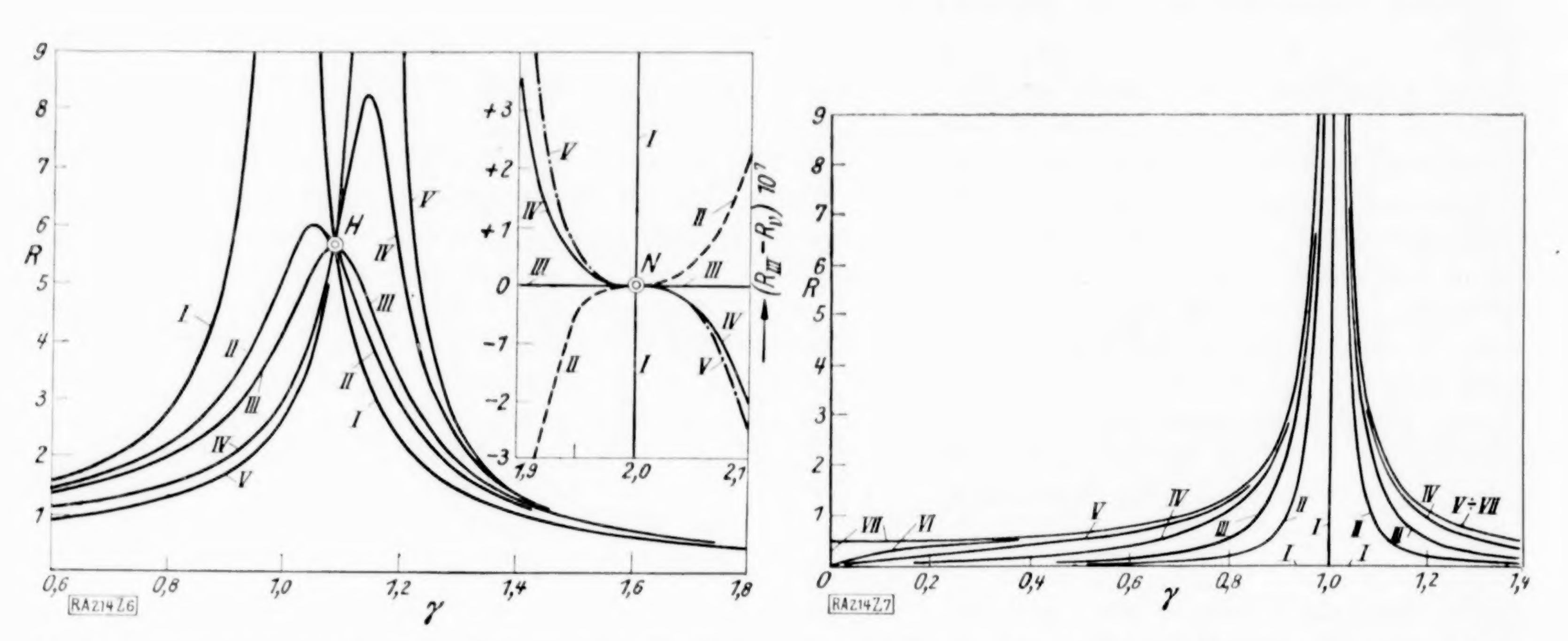


Abb. 6. Resonanzkurven des ersten Systems im Falle $\delta > 1$ für verschiedene Werte des Kopplungskoeffizienten.

Abb. 7. Resonanzkurven des zweiten Systems im Versagerfalle ($\delta = 1$) für verschiedene Werte des Kopplungskoeffizienten.

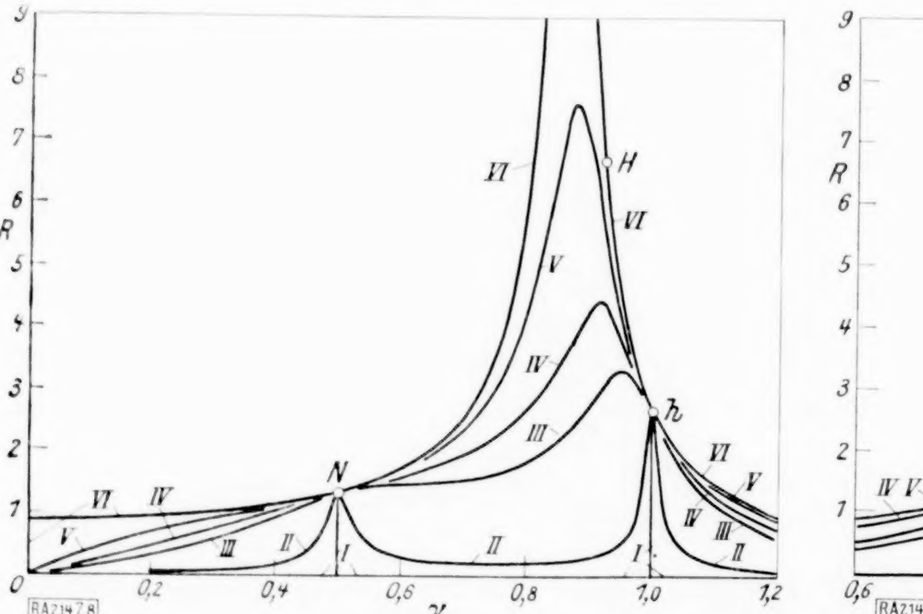


Abb. 8. Resonanzkurven des zweiten Systems im Falle $\delta < 1$ für verschiedene Werte des Kopplungskoeffizienten.

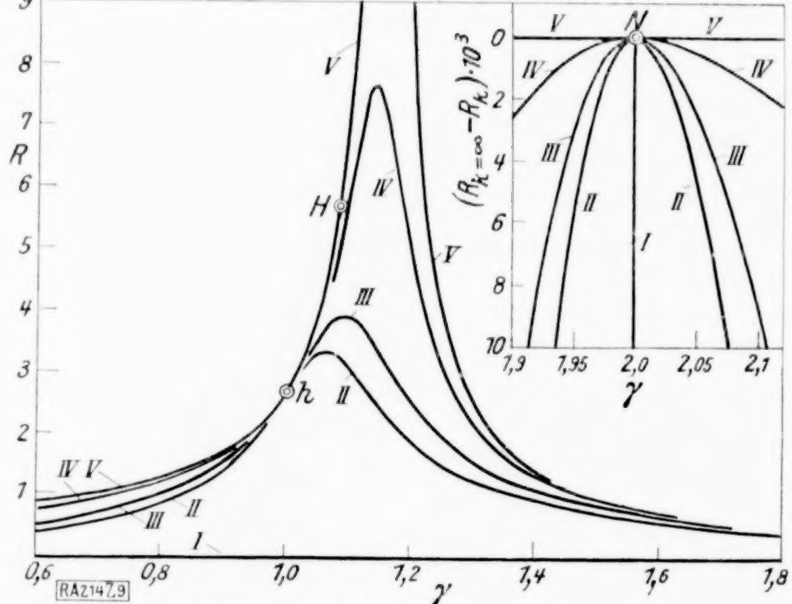


Abb. 9. Resonanzkurven des zweiten Systems im Falle $\delta > 1$ für verschiedene Werte des Kopplungskoeffizienten.

liegt also der Festpunkt H der Resonanzstelle der Funktionskurve eines ungekoppelten Systems stets näher als der Festpunkt N. Beide Festpunkte liegen auch auf der Funktionskurve, die man erhält, wenn man beide Systeme unendlich festkoppelt. Aus den Beziehungen (8b), (8c) und der Gleichung für die Resonanzstelle des durch die unendlich feste Kopplung erhaltenen Gesamtsystems: $\gamma^2{}_{k=\infty} = \dfrac{1 + \mu^2 \delta^2}{1 + \mu^2}$ ersieht man, daß die Festpunkte stets auf verschiedenen Ästen dieser Funktionskurve liegen. Und zwar liegt für $\delta < 1$ (siehe Abb. 5) der Festpunkt H auf dem Kurvenast mit den größeren Abszissen und N auf dem Ast mit kleineren Abszissen. Für $\delta > 1$ (siehe auch Abb. 6) ist dies umgekehrt. Für $\delta = 1$ (Versagerfall) haben beide Festpunkte und die Abszisse der Resonanzstelle des Gesamtsystems: $\gamma^2{}_{k=\infty} = \dfrac{1 + \mu^2 \delta^2}{1 + \mu^2} = 1$ gleiche Abszissenwerte, und die Ordinaten sind unendlich groß geworden.

Zweites System: Die Erörterung der Lage des Festpunktes N des zweiten Systems ist bereits beim ersten System geführt worden. Es ist hinzuzufügen: Beide Festpunkte h und N liegen auf der Funktionskurve des Gesamtsystems ($k = \infty$). Ihre Lage zu der Resonanzstelle des Gesamtsystems ist die gleiche wie beim ersten System, wenn man statt H jetzt h gesetzt denkt. Die Ordinate von h ist stets kleiner als diejenige von H und sie ist kleiner, gleich oder größer als die Ordinate von N je nachdem, ob μ größer, gleich oder kleiner als 1 ist. Dieses folgert man aus den bereits erwähnten Gleichungen und den Gl. (11b) und (11c). Für $\delta = 1$ (Versagerfall) sind die Abszissen der beiden Festpunkte und die Abszisse der Resonanzstelle des Gesamtsystems gleich 1. Die Ordinaten der Festpunkte werden in diesem Fall beide unendlich groß.

10. Günstigste Stärke der Reibungskopplung. Es erhebt sich nunmehr die Frage, ob es einen günstigsten Wert des Kopplungskoeffizienten k für zwei beliebige, reibungsgekoppelte Schwingungssysteme gibt. Dabei wollen wir denjenigen Wert des Kopplungskoeffizienten für den günstigsten ansprechen, für welchen das absolute Maximum der Funktionskurve des ersten Systems einen kleinsten Wert annimmt. Um das zu entscheiden, möge zunächst untersucht werden, wie sich die Funktionskurven mit k verändern. Differenziert man die Resonanzfunktionen partiell nach dem Parameter k, so geben die Ableitungen Aufschluß über das Verhalten der Kurven hinsichtlich einer Veränderung von $\boldsymbol{k}$.

Für die Funktionskurven des ersten Systems liefert die Untersuchung:

Wir wollen drei Fälle unterscheiden:

I. $\delta = 1$. Die Kurve fällt für alle γ, ausgenommen $\gamma = 1$, dort ist sie unabhängig von k. Dieses Ergebnis finden wir in Abb. 4 bestätigt.

II. $\delta < 1$. Die Kurve steigt mit wachsendem k in dem Gebiet: $\gamma_N < \gamma < \gamma_H$, sie fällt mit wachsendem k in den Gebieten: $0 < \gamma < \delta$ und $\gamma_H < \gamma$, schließlich ist sie unabhängig von k in den Festpunkten N und H. Dieses Ergebnis veranschaulicht die Abb. 5.

III. $\delta > 1$. Die Kurve steigt mit wachsendem k in dem Gebiet: $\gamma_H < \gamma < \gamma_N$, sie fällt mit wachsendem k in den Gebieten: $0 < \gamma < \gamma_H$ und $\gamma_N < \gamma$ und sie ist unabhängig von k für $\gamma = \gamma_H$ und $\gamma = \gamma_N = \delta$. Dieses Ergebnis finden wir in Abb. 6 bestätigt.

Für das zweite System liefert eine entsprechende Untersuchung: Die Funktionskurven des zweiten Systems steigen mit wachsendem k für alle γ, ausgenommen $\gamma = 1$ und $\gamma = \delta$, dort sind die Funktionskurven unabhängig von k. Dies finden wir in den Abb. 7, 8 und 9 bestätigt.

Aus unseren Untersuchungen und aus den erwähnten Abbildungen können wir über die Wahl des günstigsten Kopplungskoeffizienten folgendes aussagen: Das absolute Maximum der Funktionskurven des ersten Systems kann nie kleiner werden als die Ordinate des Festpunktes H. Man wird also den Kopplungskoeffizienten so wählen, daß das absolute Maximum gerade diesen Wert hat. Jeder andere Kopplungskoeffizient vergrößert das absolute Maximum. Man berechnet den günstigsten Kopplungskoeffizienten folgendermaßen: Die Resonanzfunktion des ersten Systems wird nach γ differenziert. In die abgeleitete Gleichung setzt man $\gamma = \gamma_H$ und löst nunmehr die gleich Null gesetzte Gleichung nach k auf. Der erhaltene Wert des Kopplungskoeffizienten ist dann der günstigste Wert des Kopplungsfaktors. Dabei ist gegebenenfalls darauf zu achten, ob die abgeleitete Gleichung zwei verschiedene Wurzeln für k enthält. Man wird dann leicht ermitteln, welcher der beiden Werte der gesuchte günstigste ist. Die Gleichung, aus der man den günstigsten Kopplungswert berechnet, lautet:

$$a\,k^4 + b\,k^2 + c = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14).$$

Darin bedeuten:

$$a = 2\,\gamma^4\,(1+\mu^2)\,[+\mu^2\,(\delta^2-\gamma^2) + (1-\gamma^2)],$$

$$b = \mu^4\,(\delta^2-\gamma^2)^2 \cdot [+2\,\gamma^2 \cdot (1-\gamma^2)\,(2-\mu^2) + 2\,\mu^2\,(\delta^2-\gamma^2)\,(2\,\gamma^2-1) - \mu^4\,(\delta^2-\gamma^2)^2],$$

$$c = 2\,\mu^8 \cdot (1-\gamma^2)\,(\delta^2-\gamma^2)^4.$$

In bezug auf die Größe des Kopplungskoeffizienten ist zu sagen: Für eine freie Schwingung hat der Reibungsfaktor bei einem ungekoppelten System im aperiodischen Grenzfall den Wert:

$$K^2 = 4\,\Theta_{II}\,c_{II} \quad \text{oder} \quad k^2 = 4\,\delta^2\,\mu^4.$$

In den angeführten Beispielen erreicht k^2_{opt} bei weitem nicht diesen Wert.

Was die Lage des absoluten Maximums der Funktionskurve des ersten Systems angeht, so folgert man aus den Erörterungen und aus den Kurvenbildern der Abb. 4, 5, 6 sehr leicht:

Die Abszisse des absoluten Maximums strebt mit wachsendem k gegen $\gamma^2 = \gamma^2_{k=\infty} = \dfrac{1+\mu^2\,\delta^2}{1+\mu^2}$ und mit fallendem k gegen $\gamma = 1$.

Der Kurventypus der Funktionskurven des ersten Systems ist insofern einfacher, wie ihn die theoretische Untersuchung vermuten läßt, als man aus der Resonanzfunktion des ersten Systems durch Differentiation nach γ eine Gleichung 10. Grades für γ, das heißt eine Gleichung 5. Grades für γ^2 erhält (γ kommt nur quadratisch vor). Mathematisch wäre damit die Möglichkeit gegeben, daß die Funktionskurve des ersten Systems 5 extreme Werte besäße.

In Abb. 5 hat die Kurve IV ein Minimum. Dieser Fall kann unter Umständen eine gewisse praktische Bedeutung haben. Wenn man es nämlich mit der Dämpfung eines Schwingungssystems zu tun hat, auf das ein äußeres Kraftmoment mit einer festen, vorgegebenen Frequenz einwirkt. Dann wird man versuchen, das Minimum tunlichst in die vorgegebene, erregende Frequenz zu legen.

Als Ergebnis dieses Abschnittes haben wir also zusammenfassend: Es gibt bei zwei reibungsgekoppelten Schwingungssystemen einen günstigsten Kopplungskoeffizienten k. Man berechnet ihn aus Gl. (14).

11. Günstigste Wahl der Systemkonstanten. Es bleibt noch zu untersuchen, wie die Systemkonstanten δ und μ zu wählen sind, damit man eine günstigste Wirkungsweise durch die Kopplung der beiden Systeme erreicht. Das absolute Maximum der Resonanzfunktion des ersten Systems bei günstigster Kopplungsstärke wird gegeben durch die Gl. (9):

$$R_0(\gamma_H) = \frac{\mu^2+2}{\mu^2(1-\delta^2)}.$$

Dies ist die Ordinate des Festpunktes H. Der Gedankengang ist jetzt der: Durch die Wahl des Kopplungskoeffizienten erreicht man, daß die Ordinate des Festpunktes H das absolute Maximum der Funktionskurve des ersten Systems ist. Die Wahl der Systemkonstanten δ und μ hat man so zu treffen, daß die Ordinate des Festpunktes H möglichst klein wird. Man sieht aus Gl. (9) ohne weiteres, daß $R_0(\gamma_H)$ um so kleiner wird, je größer μ ist, das heißt, je größer das zweite System ist. Physikalisch ist dies unmittelbar einleuchtend. Mit $\mu \to \infty$ strebt $R_0(\gamma_H)$ gegen $\dfrac{1}{1-\delta^2}$, das ist der Wert der Ordinate des zweiten Festpunktes N. Mit $\mu \to \infty$ strebt eben der Festpunkt H gegen den Festpunkt N, der letztere ist unabhängig von μ. Wie groß man also auch das zweite System macht, man kommt mit dem Maximum der Resonanzfunktion des ersten Systems nicht unter den Wert der Ordinate des Festpnnktes N herunter. Insbesondere folgt aus dieser Betrachtung, daß im Versagerfall, das heißt für $\delta = 1$, der Versager nicht dadurch beseitigt werden kann, daß man das zweite System sehr groß macht; denn unter N kann man, wie erwähnt, durch Vergrößerung des zweiten Systems nicht herunter. N liegt aber für $\delta = 1$ unendlich hoch auf der Resonanzkurve eines ungekoppelten Systems. Physikalisch findet diese Erscheinung darin ihre Erklärung, daß man durch die genaue Abstimmung der beiden Systeme die Reibungskopplung wirkungslos macht; denn das Kopplungsglied in den Ausgangsgleichungen (4) ist direkt proportional der Differenz der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Schwingungssysteme, und diese ist für $\delta = 1$, vorausgesetzt, daß man das Einschwingen der beiden Schwingungssysteme abwartet, gleich Null. Zugleich ist dieses Ergebnis ein Beweis dafür, daß man in die Ausgangsgleichungen (4) die Differenzen der Geschwindigkeiten einzuführen hat, um das Kopplungsglied unmittelbar anschaulich zu machen. Hinsichtlich der Wahl von δ ist zu sagen: Das Verhältnis der Eigenschwingungszahlen der beiden Systeme ist möglichst weit von dem Wert 1 entfernt zu wählen[4]). Man hat δ so zu wählen, daß der Ausdruck $|1-\delta^2|$ möglichst groß wird. Es gibt im allgemeinen zwei gleichberechtigte Fälle, für die der Ausdruck den gleichen Absolutwert (auf den es uns nur ankommt) annimmt. In dem einen ist $\delta < 1$ und in dem anderen ist $\delta > 1$. Den größten Wert, den man durch ein kleines δ erreichen kann, ist 1, nämlich für $\delta = 0$, diesen Wert von $|1-\delta^2|$ erreicht man für $\delta > 1$ schon bei $\delta^2 = 2$. Für noch größere δ wird $|1-\delta^2|$ sogar größer als 1 und geht mit $\delta \to \infty$ auch gegen ∞. In praktischen Fällen wird man durch diese Überlegung leicht entscheiden, ob man $\delta < 1$ oder $\delta > 1$ zu machen hat. Kann man große Werte von δ, also insbesondere Werte von δ, für welche $\delta^2 > 2$ ist (dann wird ja $|\delta^2 - 1| > 1$), erreichen, so folgt aus obiger Betrachtung, daß man ein so günstiges Gebiet mit einem $\delta < 1$ überhaupt nicht erreichen kann, weil eben das Extremste, nämlich $\delta = 0$, nur den Wert 1 liefert.

Als Ergebnis haben wir somit: Das zweite Schwingungssystem ist möglichst groß zu machen, die Schwingungssysteme sind möglichst zu verstimmen.

[4]) Prof. Schuler hat bereits darauf hingewiesen, daß $\delta = 1$ einen Versager darstellt (siehe Fußnote 2).

12. Die Phasenverschiebungen der beiden Systeme untereinander und gegen das erregende Kraftmoment. Durch die Trennung des Real- und Imaginärteiles der Amplituden in den Gl. (5) bringt man diese auf die Form:

$$A = \alpha_1 + i\,\alpha_2 \qquad B = \beta_1 + i\,\beta_2\,,$$

wo α_1 der Realteil und $i\,\alpha_2$ der Imaginärteil von A und β_1 der Realteil und $i\,\beta_2$ der Imaginärteil von B bedeuten. Wir machen nunmehr den Ansatz:

$$\varphi = A \sin (K + \omega t) \qquad \psi = B \sin (\eta + \omega t)\,,$$

wo K die Phasenverschiebung des ersten Systems gegenüber dem Kraftmoment bedeutet. Und zwar entspricht nach unserer Festsetzung einem positiven K ein Vorausschwingen des ersten Systems dem erregenden Kraftmoment gegenüber. Und η bedeutet die Phasenverschiebung des zweiten Systems gegen das erregende Kraftmoment. Auch hier soll einem positiven η ein Vorausschwingen des zweiten Systems gegenüber dem erregenden Kraftmoment entsprechen. Nach der Theorie der erzwungenen Schwingungen ist nun:

$$\operatorname{tg} K = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \qquad \operatorname{tg} \eta = \frac{\beta_2}{\beta_1}\,.$$

Setzt man für α_1, α_2, β_1, β_2 ihre Werte ein, so hat man nach einiger Umformung:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} K &= \frac{-\gamma\, k\, (\delta^2 - \gamma^2)^2 \cdot \mu^4}{\mu^4 (\delta^2 - \gamma^2)^2 \cdot (1 - \gamma^2) + \gamma^2 k^2 \left[(\delta^2 - \gamma^2)\,\mu^2 + (1 - \gamma^2)\right]} \\ \operatorname{tg} \eta &= \frac{+\mu^2 (\delta^2 - \gamma^2) \cdot (1 - \gamma^2)}{\gamma\, k \left[\mu^2 (\delta^2 - \gamma^2) + (1 - \gamma^2)\right]} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15).$$

Weiter wollen wir die Phasenverschiebung der beiden Systeme untereinander mit ε bezeichnen, und zwar soll ε definiert sein durch die Beziehung $\varepsilon = \eta - K$. Mittels des Additionstheorems des Tangens erhält man für tg ε aus den Gl. (15) die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{+\mu^2 (\delta^2 - \gamma^2)}{\gamma\, k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Nun ist aber die Kreisfunktion tg nicht eindeutig. Um zu entscheiden, in welchem Quadranten wir den Wert zu nehmen haben, machen wir folgende Überlegung: Koppelt man die Systeme immer fester, das heißt, läßt man k immer größere Werte annehmen, so werden die beiden Systeme schließlich keine Phasenverschiebung gegeneinander mehr haben. Man hat ein Gesamtsystem, das sich für $\gamma^2 = \gamma_{k=\infty}^2 = \frac{1 + \mu^2 \delta^2}{1 + \mu^2}$ mit dem erregenden Kraftmoment in Resonanz befindet. Nach der Theorie der erzwungenen Schwingungen nimmt K folgende Werte an: Für $\gamma < \gamma_{k=\infty}$ wird $K = 0$; für $\gamma = \gamma_{k=\infty}$ wird $K = -\frac{\pi}{2}$; für $\gamma > \gamma_{k=\infty}$ wird $K = -\pi$. Man diskutiert die Phasenformeln nun in der Weise, daß man zu endlichen, aber immer noch sehr großen Werten von k übergeht. Dann wird der Wert von bzw. tg K, tg η, tg ε nur wenig von den für $k = \infty$ festgestellten Werten abweichen. Auf Grund dieses Gedankenexperimentes erhält man folgende Ergebnisse:

I. Für K (siehe hierzu die Abb. 10, 13). Alle Phasenkurven beginnen im Nullpunkt und streben mit $\gamma \to \infty$ gegen $-\pi$. K kann nie positive Werte annehmen. Das erste System schwingt also nie dem Kraftmoment voraus. Alle Phasenkurven berühren sich für $\gamma = \delta$. Wir unterscheiden nun drei Fälle:

1. $\delta < 1$. Alle Phasenkurven beginnen im Nullpunkt, nehmen mit wachsendem γ negative Werte an, erreichen einen größten negativen Wert, der von k abhängt, und werden wieder gleich Null für $\gamma = \delta$ (siehe hierzu die Abb. 10). In dem Festpunkt mit der Abszisse $\gamma = \delta$ berühren sich die Kurven. Der Kopplungsfaktor, für den die Phase in dem Gebiet $0 < \gamma < \delta$ einen größten negativen Wert annimmt, berechnet man durch Differentiation der Phasenformel für tg K nach k $\left(\frac{\partial \operatorname{tg} K}{\partial k} = 0\right)$ und erhält:

$$k^2 = \frac{\mu^4 (\delta^2 - \gamma^2)^2 \cdot (1 - \gamma^2)}{\gamma^2 \left[(\delta^2 - \gamma^2)\,\mu^2 + (1 - \gamma^2)\right]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17).$$

Setzt man diesen Wert in die Phasenformel ein, so hat man für die größte Abweichung der Phase von dem Wert 0 in dem Gebiet $0 < \gamma < \delta$ die Gleichung:

$$\operatorname{tg} K_{k=k_{\mathrm{opt}}} = \frac{\mu^2 \cdot (\delta^2 - \gamma^2)}{2\sqrt{(1-\gamma^2)\,[(\delta^2-\gamma^2)\,\mu^2 + (1-\gamma^2)]}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Will man in einem speziellen Fall noch die Abszisse wissen, für welche das Maximum der Abweichung eintritt, so hat man die Gl. (18) nach γ zu differenzieren. Wächst γ zu Werten größer als δ an, so strebt K sehr stark gegen $-\pi$, erreicht diesen Wert allerdings erst für unendlich große Werte von γ. Wird k Null, so strebt K gegen die Kurve I der Abb. 10, wird k unendlich groß, so strebt K gegen die Kurve V der Abb. 10.

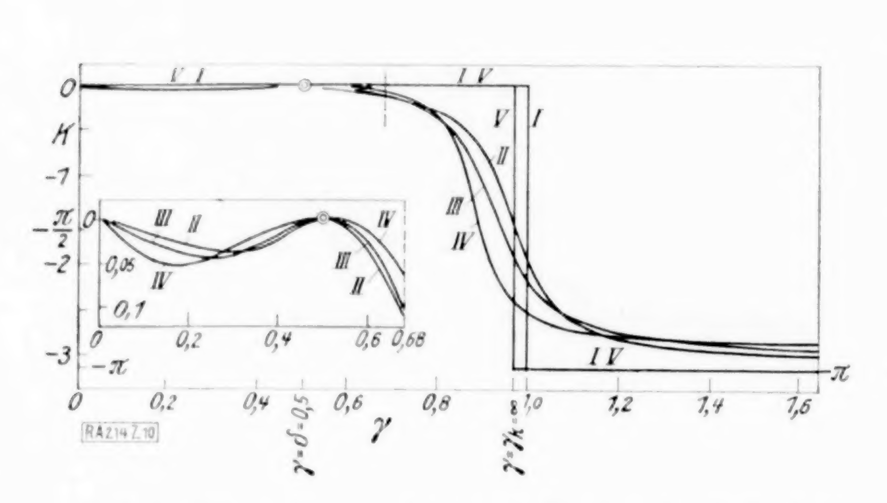


Abb. 10. Phasenkurven des ersten Systems im Falle $\delta < 1$ für verschiedene Werte des Kopplungskoeffizienten.

Abb. 11. Phasenkurven des zweiten Systems im Falle $\delta < 1$ für verschiedene Werte des Kopplungskoeffizienten.

2. $\delta > 1$. Die Verhältnisse liegen hier umgekehrt. Die Phase strebt von Null aus zunächst gegen $-\pi$, erreicht diesen Wert für $\gamma = \delta$, entfernt sich dann wieder von dem Wert $-\pi$ in der gleichen Richtung, von der aus es sich näherte, erreicht ein von k abhängiges Maximum und strebt wieder gegen $-\pi$. Hinsichtlich des Maximums der Abweichung der Phase von dem Wert $-\pi$ in dem Gebiet $\delta < \gamma$ gelten dieselben Gl. (17) und (18) wie für den Fall $\delta < 1$.

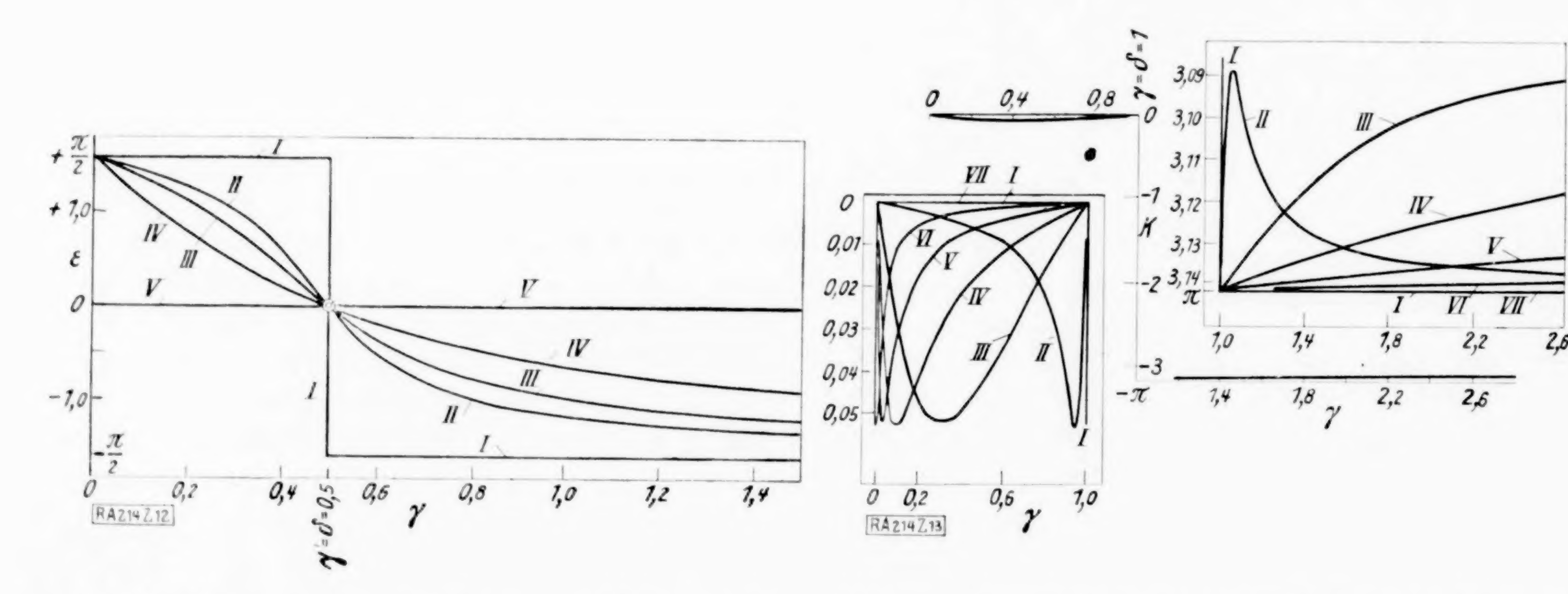


Abb. 12. Funktionskurven der Phasenverschiebungen der Systeme gegeneinander im Falle $\delta < 1$ für verschiedene Werte des Kopplungskoeffizienten.

Abb. 13. Phasenkurven des ersten Systems im Versagerfall ($\delta = 1$) für verschiedene Werte des Kopplungskoeffizienten.

3. $\delta = 1$. Der besondere Fall $\delta = 1$ (Versagerfall) ist durch die Unstetigkeit der Phasenkurve für $\gamma = \delta = 1$ ausgezeichnet. Die Phase springt hier um den Wert π von 0 nach $-\pi$. In dem Gebiet $0 < \gamma < \delta = 1$ erreicht die Kurve ein Maximum, dessen Größe von k unabhängig ist, wie man aus den Gl. (17) und (18) sieht. Abhängig von k ist lediglich die Abszisse des Maximums. Auch in dem Gebiet $\delta = 1 < \gamma$ erreicht die Kurve eine maximale Abweichung von $-\pi$. Der absolute Betrag des Maximums ist der gleiche, wie er von der Kurve in dem Gebiet $0 < \gamma < \delta = 1$ erreicht wird. Er ist unabhängig von k. Abhängig von k ist lediglich die Abszisse des Maximums (hierzu siehe Abb. 13). Mit $k \to 0$ und mit $k \to \infty$ strebt die Phasenkurve derselben Grenzkurve zu, wie man der Abbildung auch entnimmt.

II. Für η (siehe hierzu die Abb. 11, 14). Alle Phasenkurven beginnen in dem Punkt $\gamma = 0 \quad \eta = +\frac{\pi}{2}$ und streben mit $\gamma \to \infty$ gegen $-\frac{3}{2}\pi$. In den drei Punkten mit den Abszissen $\gamma = 1 \quad \gamma = \delta \quad \gamma = \gamma_{k=\infty}$ überschneiden sich alle Kurven. Wir wollen wieder drei Fälle unterscheiden:

1. $\delta < 1$. Alle Kurven beginnen in dem Punkt $\gamma = 0 \quad \eta = +\frac{\pi}{2}$. Sie streben mit wachsendem γ gegen den Wert 0 und erreichen diesen in dem Festpunkt mit der Abszisse $\gamma = \delta$ (siehe hierzu die Abb. 11). Wächst γ weiter, so streben die Kurven gegen den Wert $-\frac{\pi}{2}$ und erreichen ihn in dem Festpunkt mit der Abszisse $\gamma^2 = \gamma^2{}_{k=\infty} = \frac{1+\mu^2\delta^2}{1+\mu^2}$. Wächst γ noch weiter, so gehen die Kurven gegen $-\pi$, sie nehmen diesen Wert in dem Festpunkt mit der Abszisse $\gamma = 1$ an. Mit weiter wachsendem γ streben die Phasenkurven gegen $-\frac{3}{2}\pi$, sie erreichen diesen Wert allerdings erst mit unendlich großen Werten von γ. Mit $k \to \infty$ gehen die Kurven gegen die Grenzkurve V. Mit $k \to 0$ streben die Kurven gegen die Grenzkurve I. Die Grenzkurve V der Abb. 11 und der Abb. 10 sind identisch, wie man das auch erwartet, denn beide Systeme gehen in das gleiche Gesamtsystem auf, wenn k gegen unendlich große Werte strebt. Wie im übrigen die Kurven sich mit dem Kopplungskoeffizienten verändern, sieht man in der Abb. 11.

2. $\delta > 1$. Der Typus der Kurven hat sich in diesem Falle nicht verändert. Nur die Festpunkte haben ihre Rollen vertauscht.

3. $\delta = 1$. In diesem speziellen Fall (Versagerfall) fallen alle Festpunkte zusammen. Die Kurven erleiden einen Sprung für $\gamma = 1$ (siehe die Abb. 14).

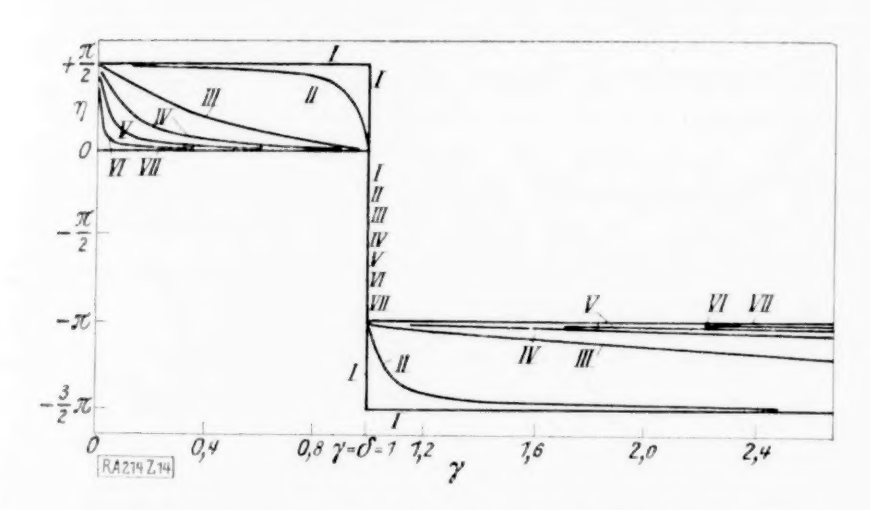


Abb. 14. Phasenkurven des zweiten Systems im Versagerfall ($\delta = 1$) für verschiedene Werte des Kopplungskoeffizienten.

Abb. 15. Funktionskurven der Phasenverschiebungen der Systeme gegeneinander im Versagerfall ($\delta = 1$) für verschiedene Werte des Kopplungskoeffizienten.

III. Für ε (siehe hierzu die Abb. 12, 15). Alle Kurven beginnen in dem Punkt $\gamma = 0$ $\varepsilon = +\frac{\pi}{2}$ und streben mit $\gamma \to \infty$ gegen $-\frac{\pi}{2}$. Die Kurven überschneiden sich alle in dem Festpunkt mit der Abszisse $\gamma = \delta$ (siehe hierzu die Abb. 12, 15). Der Kurventypus ändert sich mit δ nicht. Die Kurven sind auch im Falle $\delta = 1$ (Versagerfall) nicht unstetig (siehe Abb. 15). Mit $k \to \infty$ gehen die Kurven gegen die Abszissenachse. Mit $k \to 0$ gehen sie gegen die Grenzkurve I der Abb. 12 und 15. Die beiden Schwingungssysteme schwingen also für $\gamma = \delta$ immer in Phase. Für Werte von γ, welche kleiner als δ sind, schwingt das zweite System dem ersten voraus. Für Werte von γ, die größer als δ sind, schwingt das zweite System dem ersten nach.

13. Zwei Anwendungsbeispiele. Es sollen nunmehr die theoretischen Ergebnisse auf zwei technische Meßinstrumente angewendet werden.

1. Der Anschützsche Kreiselkompaß[5]).
2. Der Fliegerhorizont der Askania-Werke.

Bei beiden Instrumenten sind zur Dämpfung störender Schwingungen Flüssigkeitsbehälter eingebaut, die im wesentlichen mit dem eigentlichen Meßinstrument reibungsgekoppelt sind.

[5]) Die Dämpfungseinrichtung zu diesem Meßinstrument ist konstruiert von Prof. Schuler (siehe amerikanische Patentschrift 1186686).

1. Die Dämpfungseinrichtung beim Anschützschen Kreiskompaß (siehe hierzu die Abb. 16). Zur Dämpfung der Elevationsschwingungen des Anschützschen Kreiselkompasses hat man zwei Flüssigkeitsbehälter, die durch einen Kanal wie zwei kommunizierende Röhren miteinander verbunden sind, in das Kompaßsystem eingebaut. Die Elevationsschwingungen sind Schwingungen des Kreisels um eine Achse senkrecht zur Zeichenebene. Infolge des Eigenimpulses des Kreisels, den man in bezug auf die Eigenschwingungen als fingiertes Trägheitsmoment auffassen kann, ist die Schwingungszeit der freien Elevationsschwingungen des Kreisels sehr groß im Verhältnis zur Eigenschwingungsdauer des Flüssigkeitspendels. Durch die Beschleunigungen des Drehpunktes D des Gesamtsystems wirken Momente auf die Schwingungssysteme, die proportional den Stabilitätsmomenten sind. Man kann die Beschleunigungen des Drehpunktes D hinsichtlich der Wirkung auf die Systeme einem Schwanken der Erdschwere gleichsetzen. Mathematisch genügt man diesen Verhältnissen, indem man in die Schwingungsgleichungen der Systeme periodische Momente einführt. In die Schwingungsgleichung des ersten Systems ist ein Moment P, welches dem Stabilitätsmoment des ersten Systems, c_I, proportional ist, einzuführen, und in die Schwingungsgleichung des zweiten Systems ist ein Moment p, welches dem Stabilitätsmoment des zweiten Systems, c_{II}, proportional ist, hinzuzufügen. Unsere Ausgangsgleichungen (4) lauten damit für diese Schwingungssysteme:

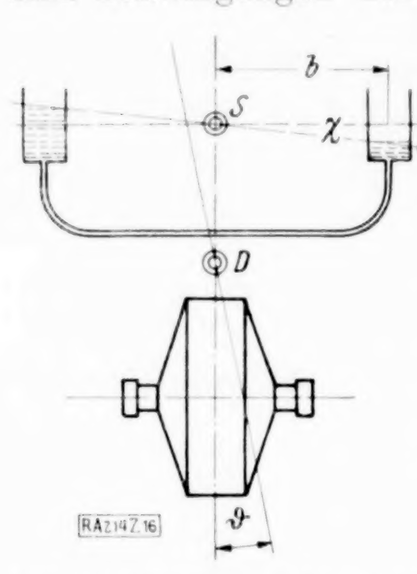


Abb. 16. Schema des Anschützschen Kreiselkompasses mit Dämpfung durch Reibungskopplung nach M. Schuler.

$$\left.\begin{aligned}\Theta_I \ddot{\vartheta} + c_I \vartheta + K(\dot{\vartheta} - \dot{\chi}) &= P e^{i\omega t}\\ \Theta_{II} \ddot{\chi} + c_{II}\chi + K(\dot{\chi} - \dot{\vartheta}) &= p e^{i\omega t}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (19).$$

In der Abb. 16 ist χ derjenige Winkel, den die Verbindungslinie der Flüssigkeitsspiegel mit der Horizontalen einschließt. Beide Winkel ϑ und χ sind positiv definiert im mathematischen Sinne, das heißt, die Winkel sind positiv, wenn die Systeme im entgegengesetzten Sinne der Uhrzeigerrichtung ausschlagen. Wir machen den Ansatz:

$$\vartheta = A e^{i\omega t} \qquad \chi = B e^{i\omega t}.$$

Dann folgt für die Amplituden aus den Gl. (19):

$$\left.\begin{aligned}A &= \frac{P[-\omega^2\Theta_{II} + c_{II} + K i\omega] + p K i\omega}{(-\omega^2\Theta_I + c_I)(-\omega^2\Theta_{II} + c_{II}) + K i\omega(-\omega^2\Theta_{II} + c_{II} - \omega^2\Theta_I + c_I)}\\ B &= \frac{p[-\omega^2\Theta_I + c_I + K i\omega] + P\cdot K i\omega}{(-\omega^2\Theta_I + c_I)(-\omega^2\Theta_{II} + c_{II}) + K i\omega(-\omega^2\cdot\Theta_{II} + c_{II} - \omega^2\Theta_I + c_I)}\end{aligned}\right\} \quad . . (20).$$

Und für die Resonanzfunktionen der beiden Systeme erhält man:

$$\left.\begin{aligned}R_I k^2 &= \frac{\mu^4(\delta^2-\gamma^2)^2 + \gamma^2 k^2\left(1+\left(\frac{p}{P}\right)\right)^2}{\mu^4[(1-\gamma^2)(\delta^2-\gamma^2)]^2 + \gamma^2 k^2[\mu^2(\delta^2-\gamma^2) + (1-\gamma^2)]^2}\\ R_{II} k^2 &= \frac{\mu^4\left(\frac{p}{P}\right)^2\cdot(1-\gamma^2)^2 + \gamma^2 k^2\left(1+\left(\frac{p}{P}\right)\right)^2}{\mu^4[(1-\gamma^2)(\delta^2-\gamma^2)]^2 + \gamma^2 k^2[\mu^2(\delta^2-\gamma^2) + (1-\gamma^2)]^2}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (21).$$

Die Resonanzfunktionen sind mit den Amplituden durch die Beziehungen verknüpft:

$$|A|^2 = \frac{P^2}{c_I^2}\cdot R_I k^2 \qquad |B|^2 = \frac{P^2}{c_I^2}\cdot R_{II} k^2.$$

Wir setzen in die Gl. (21) nunmehr $\delta = \frac{\nu_{II}}{\nu_I} = \infty$ ein, dabei benutzen wir die Beziehungen:

$$\frac{p}{P} = \frac{c_{II}}{c_I} = \mu^2\delta^2 = \lambda^2 \qquad \frac{\omega}{\nu_{II}} = \sigma.$$

Die Gl. (21) werden damit:

$$\left.\begin{aligned}R_I k^2 \xrightarrow[\delta=\infty]{} &\frac{\lambda^4(1-\sigma^2)^2 + \gamma^2 k^2(1+\lambda^4)}{\lambda^4[(1-\gamma^2)(1-\sigma^2)]^2 + \gamma^2 k^2[\lambda^2(1-\sigma^2) + (1-\gamma^2)]^2}\\ R^2_{II} k \xrightarrow[\delta=\infty]{} &\frac{\sigma^4\lambda^8 + \gamma^2 k^2(1+\lambda^4)}{\lambda^4[(1-\gamma^2)(1-\sigma^2)]^2 + \gamma^2 k^2[\lambda^2(1-\sigma^2) + (1-\gamma^2)]^2}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (22).$$

Es sei hier bemerkt, daß das Stabilitätsmoment des Kreisels in bezug auf seine Elevationsschwingungen nicht etwa sehr klein ist, wodurch ja auch eine große Schwingungszeit der Elevationsschwingungen hervorgerufen werden würde, sondern das Großsein der Schwingungsdauer hat seine Ursache, wie erwähnt, in den Kreiselkräften, die wie ein Trägheitsmoment wirken. Es ist also $\mu^2 = \frac{\Theta_{II}}{\Theta_I}$ sehr klein, aber $\lambda^2 = \frac{c_{II}}{c_I}$ hat einen durchaus endlichen Wert.

Aus Gl. (22) lassen sich die Festpunkte des ersten Systems, die uns ja interessieren, ermitteln. Sie sind:

1. $\gamma = 0$, dann hat die Resonanzfunktion des ersten Systems den Wert 1.
2. $\gamma = \infty$, dann hat die Resonanzfunktion des ersten Systems den Wert 0.
3. $\omega = \nu_{II}$, das heißt $\gamma = \delta$, dann hat die Resonanzfunktion des ersten Systems einen sehr kleinen Wert.
4. $\gamma_H{}^2 = 1 - \frac{1}{\lambda^2} + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^4}}$.

Diese Abszisse des vierten Festpunktes hat einen Wert, der stets größer als 1 ist, wie man leicht erkennt. Setzt man in die Resonanzfunktion eines ungekoppelten Systems für γ^2 diesen Wert ein, so erhält man die Ordinate des Festpunktes zu

$$R_0\,(\gamma = \gamma_H) = \frac{1}{\lambda^2} + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^4}}\,.$$

Man hat also die Stärke der Reibungskopplung zwischen den beiden Systemen so zu wählen, daß die Resonanzfunktion des ersten Systems für $\gamma = \gamma_H$ einen größten Wert annimmt. Die Ordinate des Festpunktes ist stets größer als 1, wie man aus ihrem Wert ohne weiteres sieht. Die Ordinate nimmt den kleinsten Wert, den sie überhaupt annehmen kann, dann an, wenn $\lambda^2 = \infty$ ist, das heißt, wenn das Stabilitätsmoment des zweiten Systems im Verhältnis zum Stabilitätsmoment des ersten Systems sehr groß ist. Läßt man das Stabilitätsmoment des zweiten Systems kleiner und kleiner werden, so strebt die Ordinate des Festpunktes gegen unendlich große Werte. Es gibt also ein Optimum des Stabilitätsmomentes des zweiten Systems bei erzwungenen Schwingungen, die wir hier behandeln. Ich weise aber auf die Arbeit von K. Glitscher hin[6]), der für freie Schwingungen ein Optimum der Größe des zweiten Systems errechnet hat.

2. Die Dämpfung beim Fliegerhorizont. Bei diesem Anwendungsbeispiel handelt es sich im Prinzip um zwei Schwingungssysteme, wie sie in Abb. 3 dargestellt sind. Beim Fliegerhorizont verwendet man zur Dämpfung ein geschlossenes, kreisförmiges Rohr, welches mit Quecksilber ganz angefüllt ist. Auch dieses Beispiel stellt wie das vorige (wo $\delta \to \infty$ war) einen Grenzfall dar, insofern als die Eigenschwingungszahl des Quecksilberfadens Null ist. Dieses Nullsein der Eigenschwingungszahl des zweiten Systems hat nicht etwa, wie gleich bemerkt sei, darin seine Ursache, weil das Trägheitsmoment des zweiten Systems sehr groß wäre, sondern weil das Stabilitätsmoment des zweiten Systems infolge der vollständigen Anfüllung des geschlossenen Rohrs mit Quecksilber Null ist. In unsere Formeln haben wir also $\delta = 0$ zu setzen. $\mu^2 = \frac{\Theta_{II}}{\Theta_I}$ hat einen durchaus endlichen Wert, deshalb brauchen wir λ^2, welches diesmal Null ist, nicht einführen. Die Festpunkte H und N liegen wegen $\delta < 1$ auf dem Kurvenast — $\gamma < 1$ — der Resonanzfunktion eines ungekoppelten Systems (siehe Abb. 1). Und zwar hat der Festpunkt N die Abszisse 0 und die Ordinate 1; er fällt also mit dem Anfangspunkt zusammen. Der Festpunkt H hat die Abszisse $\frac{2}{2+\mu^2}$ und die Ordinate $1 + \frac{2}{\mu^2}$. Man hat den Kopplungskoeffizienten wie im ersten Beispiel so zu wählen, daß die Funktionskurve des ersten Systems für $\gamma = \gamma_H$ einen größten Wert annimmt. Außerdem sieht man aus der Ordinate des Festpunktes H, daß μ^2 möglichst groß, das heißt Θ_{II} möglichst groß zu machen ist, um den Maximalwert der Funktionskurve des ersten Systems klein zu halten. Also je größer das zweite System im Vergleich zum ersten ist, um so stärker wird die störende Schwingung gedämpft. Dadurch, daß man die Röhre mit Quecksilber statt mit Wasser füllt, hat man das Trägheitsmoment des zweiten Systems bereits 13,6 mal so groß gemacht wie das Trägheitsmoment bei Anfüllung mit Wasser.

Es sei bemerkt, daß bei beiden Anwendungsbeispielen nur die erzwungenen und nicht die freien Schwingungen behandelt worden sind.

[6]) K. Glitscher, Die Dämpfung der Schwingungen des Anschützschen Kreiselkompasses durch kommunizierende Gefäße. — P. Debye: Probleme der modernen Physik, Festschrift für A. Sommerfeld.

Beide Anwendungsbeispiele stellen ein Optimum der Anwendungsmöglichkeit der Reibungskopplung dar hinsichtlich des Verhältnisses der Eigenschwingungszahlen der beiden Schwingungssysteme.

14. Versuche zur Prüfung der Theorie [7]). Zur experimentellen Prüfung der Theorie wurde der in Abb. 20 und Abb. 21 wiedergegebene Apparat verwandt. Er besteht im wesentlichen aus einem kreisförmigen Glasrohr a mit überall gleichem Querschnitt, das an einer Holzscheibe b befestigt ist. Die Holzscheibe ist an eine Achse c geschraubt, auf welche durch eine Spiralfeder d ein äußeres, periodisches Kraftmoment übertragen werden kann. Dieses System stellt das erste Schwingungssystem dar. Sein Stabilitätsmoment und gleichfalls sein Trägheitsmoment sind weitgehend veränderlich durch Gewichte e, die sich an Eisenstäben f verschiebbar anbringen lassen. Die Eisenstäbe selbst sind rechtwinklig mit der Drehachse c fest verbunden. Das Kreisrohr a ist so befestigt, daß sein Krümmungsmittelpunkt S mit der Drehachse zusammenfällt. Die Enden des Rohres sind durch Stopfen g verschließbar. Diese Stopfen sind durchbohrt. Durch die Bohrungen führen Messingröhrchen, die durch einen Gummischlauch i miteinander verbunden sind. Das Glasrohr wird nunmehr mit Wasser gefüllt, und zwar aus rechnerischen Gründen etwa bis zur Hälfte. Das Wasser ist der besseren Sichtbarkeit wegen rot gefärbt. Die schwingungsfähige Wassersäule stellt nun das zweite Schwingungssystem dar. Bei den Schwingungen der Wassersäule im Glasrohr, dessen Enden durch einen Gummischlauch verbunden sind, muß die Luft hin und her strömen. Durch eine Klemme k, die am Gummischlauch angebracht ist, kann man die durchströmende Luft drosseln und so eine beliebige Reibung zwischen den beiden Schwingungssystemen einstellen. Die periodischen Kraftmomente werden durch eine Feder d auf das System I übertragen. Die Feder ist mit einem Schwinghebel l verbunden, und dieser wird durch einen Exzenter m, der auf der Schwungradachse aufgesetzt ist, hin und her bewegt. Um die erregende Frequenz möglichst konstant halten zu können, war das erwähnte, schwere Schwungrad auf der Welle n aufgesetzt. Es konnte durch einen Elektromotor angetrieben werden. Die Tourenzahl dieses Motors war durch Vorschaltwiderstände weitgehend zu verändern.

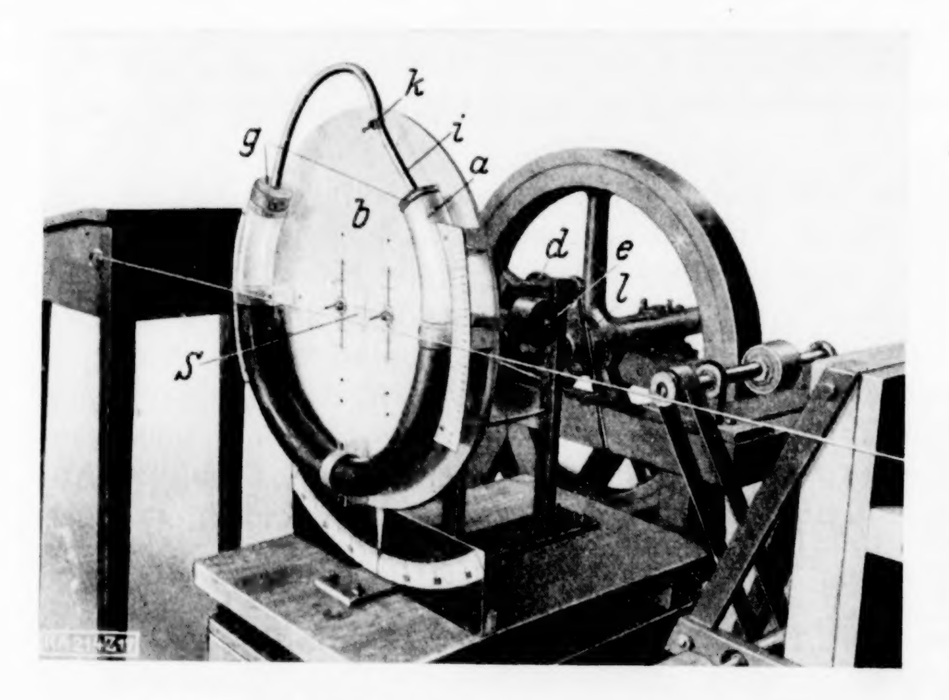


Abb. 17. Der zu den Versuchen verwandte Apparat.

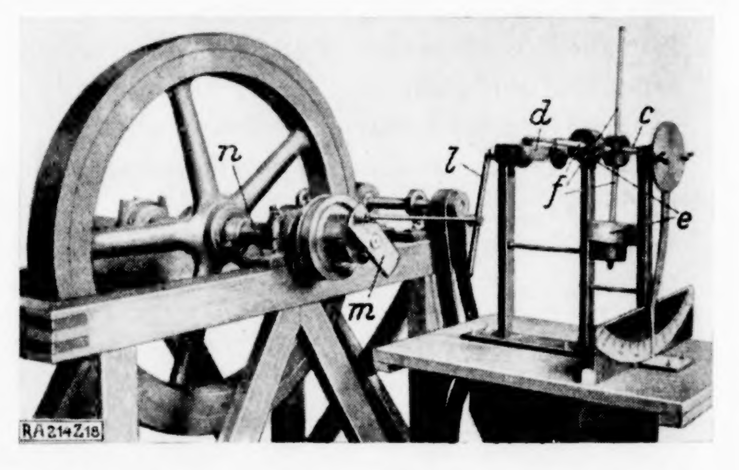


Abb. 18. Der Apparat der Abb. 17 nach Entfernung der Holzscheibe mit dem Flüssigkeitspendel.

1. Versuch. Die beiden Systeme wurden abgestimmt. Das Glasrohr wurde zur Hälfte mit Wasser gefüllt. Die Schwingungszeit des angestoßenen Wassers war $T_{II} = 1{,}234$ sec. Mittels der auf den Eisenstäben verschiebbaren Gewichte wurde die Schwingungszeit des ersten Systems so lange variiert, bis sie mit derjenigen der Wassersäule übereinstimmte. Weiter wurden gemessen:

$$c_I = 74{,}5 \cdot 10^6 \text{ cm} \cdot g \qquad c_{II} = 28{,}0 \cdot 10^6 \text{ cm} \cdot g .$$

Die Systemkonstanten sind also: $\delta = 1$ $\mu^2 = 0{,}376$. In bezug auf die Phasen wurde folgendes beobachtet: Für $\gamma < 1$ schwingt das erste System in bezug auf das äußere Kraftmoment nach, das zweite vor. Die Ausschläge des ersten Systems werden mit größerwerdendem γ auch größer. Das zweite System schlägt mit stärkerer Reibungskopplung immer stärker aus, bis

[7]) Die Versuche sind im Institut für angewandte Mechanik der Universität zu Göttingen ausgeführt.

es den Ausschlag des ersten Systems bei vollkommener Drosselung erreicht. Für $\gamma = 1$ erhält man sehr große Amplituden beider Systeme. Und zwar ist die Stärke der Kopplung ohne Einfluß auf die Ausschläge. Die beiden Systeme schwingen in Phase untereinander. Die Phasenwerte gegen das Kraftmoment sind nicht konstant. Die Phasen wechseln ständig von 0 über $-\frac{\pi}{2}$ bis $-\pi$ und umgekehrt. Man kann von einem labilen Gleichgewicht sprechen. Für Werte von γ, die größer als 1 sind, schwingt das erste System fast entgegengesetzt zum Kraftmoment und ebenfalls das zweite System. Das zweite System schwingt dem ersten voraus. Interessant ist folgende Beobachtung: Stellt man zunächst eine erregende Frequenz $\gamma < 1$ ein und steigert die Frequenz sehr schnell auf Werte $\gamma > 1$, so sieht man gut das Umspringen der Phasen. Für $\gamma > 1$ schwingt das erste System mit endlicher Amplitude. Die Amplitude des zweiten Systems ist kleiner als diejenige des ersten. Mit stärkerwerdender Kopplung wächst die Amplitude des zweiten Systems und wird gleich derjenigen des ersten Systems für unendlich feste Kopplung.

II. Versuch. Die beiden Systeme wurden verstimmt. Das Glasrohr enthielt die gleiche Wassermenge wie bei Versuch I.

a) Es wurden gemessen:

$$T_{\rm I} = 2{,}275 \qquad T_{\rm II} = 1{,}234 \qquad c_{\rm I} = 27{,}6 \cdot 10^6 \qquad c_{\rm II} = 28{,}0 \cdot 10^6 .$$

Die Systemkonstanten sind also: $\delta^2 = 3{,}40$ $\mu^2 = 0{,}30$. Es wurde beobachtet: Für $\gamma < 1$ schwingt das erste System dem Kraftmoment nach und das zweite voraus. Für $\gamma = 1$ erkennt man sehr gut das In-Phaseschwingen von äußerem Moment und Wassersäule. Bei weiterer Steigerung der erregenden Frequenz bleibt die Wasserschwingung sehr schnell immer mehr zurück. Für $\gamma = \gamma_{k=\infty}$, die Schwingungszeit hierfür ist $T_{k=\infty} = 1{,}601$, schwingt das Wasser sehr genau um $\frac{\pi}{2}$ nach. Das erste System schwingt für diese äußere Frequenz schon um mehr als $\frac{\pi}{2}$ nach. Für $\gamma = \delta$ schwingen erstes und zweites System untereinander in Phase, und in bezug auf die Feder schwingen sie genau entgegengesetzt. Diese letztere Erscheinung wurde bei dem nächsten Versuch besser beobachtet. Erregt man die beiden Systeme mit der äußeren Frequenz $\gamma = \gamma_H$, so muß das Experiment die Unabhängigkeit des Maximalausschlages von der Drosselung zeigen. Man geht praktisch folgendermaßen vor: Die erregende Frequenz stellt man größenmäßig auf $\gamma = \gamma_H$ ein. Man macht die Kopplung ungefähr Null, indem man die Stopfen aus den Glasrohrenden nimmt, liest den Ausschlag des ersten Systems nach einigem Warten ab, sperrt dann den Schlauch durch die Klemme ganz und liest nach dem erforderlichen Abwarten eines konstanten Ausschlags wieder ab. Das Abwarten des konstanten Ausschlags ist deshalb notwendig, um die Anfangsbedingungen zu eliminieren, diese überlagern sich nämlich in Form freier Schwingungen den erzwungenen und verändern daher die Amplituden. War nun der Ausschlag für kleine Kopplung größer als derjenige für völlige Drosselung, so lehrt uns dies, daß wir die erregende Frequenz zu vergrößern haben, im anderen Falle umgekehrt. Auf diese Weise kann man den Festpunkt H sehr leicht ermitteln. Es wurden gemessen: $T_{k=\infty} = 1{,}601$ $T_H = 1{,}985$, und der Ausschlag für $\gamma = \gamma_H$ war: $12^0 - 13^0$. Der Festpunkt N liegt für diese starke Verstimmung schon so niedrig, daß die Ausschläge zu klein werden, deshalb wurde für die Untersuchung dieses Festpunktes N eine kleinere Verstimmung gewählt. Andererseits liegt der Festpunkt H schon ziemlich hoch auf der Resonanzkurve des ungekoppelten Systems, so daß die Ausschläge viel zu groß würden, wenn man nicht eine starke Verstimmung der beiden Schwingungssysteme wählen würde.

b) Es wurden die Zeiten und die Stabilitätsmomente gemessen:

$$T_{\rm I} = 1{,}76 \qquad T_{\rm II} = 1{,}234 \qquad c_{\rm I} = 27{,}6 \cdot 10^6 \qquad c_{\rm II} = 28{,}0 \cdot 10^6 .$$

Die Systemkonstanten sind also: $\delta^2 = 2{,}04$ $\mu^2 = 0{,}50$. Die Phasenbeobachtungen waren die gleichen wie unter Versuch a). Für $\gamma = \delta$ hat man In-Phaseschwingen der beiden Systeme untereinander und entgegengesetztes Schwingen zur Feder. Für $\gamma > \delta$ schwingt das Wasser dem Rohr nach und dieses bleibt ungefähr in entgegengesetzter Phase zur Feder. Man kann eine kleine Abweichung in Richtung einer kleineren Phasendifferenz feststellen, doch ist dies immerhin so gering, daß man es nicht als absolut sicher hinstellen kann. Auch hier kann man bei schneller Veränderung der erregenden Frequenz das Umschlagen der Phasen gut beobachten. Für $\gamma = \delta$ mißt man den Ausschlag: $3{,}5^0$ im Mittel, die Grenzen liegen sehr weit gegriffen zwischen 3^0 und 4^0. Um nun die richtige Größe der Ausschläge zu prüfen, wurde die Größe des äußeren Momentes gemessen. Die Messung wurde in der Weise ausgeführt,

daß man auf die Holzscheibe ein bekanntes, konstantes Moment wirken ließ und einmal die Feder in der Nullage festhielt und ein zweites Mal sie mit der Holzscheibe um die gleiche Gradzahl auslenkte. Die Differenz der gemessenen Momente stellt das Moment der äußeren Kraft dar. Es wurde daraus das Moment der Feder berechnet zu: $c_F = 4{,}035 \cdot 10^6$. Der Maximalausschlag beträgt 24°, so daß $P = 96{,}8 \cdot 10^6$ zu setzen ist. Und damit: $\frac{P}{c_\mathrm{I}} = 3{,}58$. Nun ist: $A = \frac{P}{c_\mathrm{I}} \cdot R_{1k}$. Für den Versuch a) haben wir: $R_0(\gamma_H) = \frac{2+\mu^2}{\mu^2(\delta^2-1)} = 3{,}202$, also $A(\gamma_N) = 11{,}5^\circ$ (gemessen war $12^\circ - 13^\circ$). Für den Versuch b) haben wir: $R_0(\gamma_N) = \frac{1}{\delta^2-1} = 0{,}963$, also: $A(\gamma_N) = 3{,}5^\circ$ (gemessen war im Mittel $3{,}5^\circ$). Daß es eine günstigste Kopplungsstärke gibt, zeigt man experimentell folgendermaßen. Man drosselt so stark, daß das Maximum der Ausschläge für $\gamma = \gamma_H$ zu 13° eintritt. Durch Variation der Kopplungsstärke ist dieser Ausschlag, wie schon gezeigt wurde, nicht kleiner zu machen.

15. Zusammenfassung der Ergebnisse. Wir haben also festgestellt: Bei zwei reibungsgekoppelten Schwingungssystemen gibt es einen Wert des Kopplungskoeffizienten, für den das absolute Maximum der Resonanzfunktion des ersten Systems, dessen Schwingungen zu dämpfen sind, einen kleinsten Wert annimmt. Der Wert des Kopplungsfaktors läßt sich aus der Gl. (14) berechnen. Diese Reibungsgröße läßt sich experimentell in angegebener Weise einstellen. Die beiden Schwingungssysteme sind möglichst stark zu verstimmen. Sind die Eigenschwingungszahlen beider Systeme gleich, sind also die beiden Systeme abgestimmt, so werden die Ausschläge beider Systeme für eine erregende Frequenz, die gleich der Eigenfrequenz der Systeme ist, theoretisch unendlich groß. Die Kopplung versagt. Das zweite System ist möglichst groß zu machen, also sowohl das Stabilitätsmoment als auch das Trägheitsmoment des zweiten Systems sind groß zu machen, wenn wir von einer Veränderung von δ durch eine Veränderung von μ^2 und λ^2 absehen. 214

Zur rechnerischen Behandlung der Erstarrungsvorgänge beim Gießen von Metallen.

Von *C. Schwarz* in Hamborn a. Rh.

So reichhaltig die Literatur an Untersuchungen und Theorien über die Erstarrungsvorgänge bei der Abkühlung flüssiger Metalle an Hand von Messungen und allgemeinen Überlegungen ist, so selten findet man Arbeiten, die das Problem von der rechnerischen Seite her anfassen. Zu den wichtigsten Arbeiten der letzteren Art gehören die Abhandlungen des Japaners S. Saitô[1]), des Engländers Lightfoot[2]) und des Amerikaners A. L. Feild[3]). Allen drei Arbeiten ist gemeinsam, daß sie die Frage vom rein mathematischen Standpunkt aus aufrollen, ohne auf eine kritische Würdigung der ihren Berechnungen zugrunde gelegten Annahmen im Vergleich mit den Verhältnissen beim Gießen einzugehen. Vor allem fehlt die Berücksichtigung des Einflusses der unterschiedlichen Wärmeleitfähigkeit der Gießform und des Widerstandes, den die unvollkommene Berührung zwischen Block und Gießform sehr bald nach dem Gießen dem Wärmeausgleich entgegensetzt.

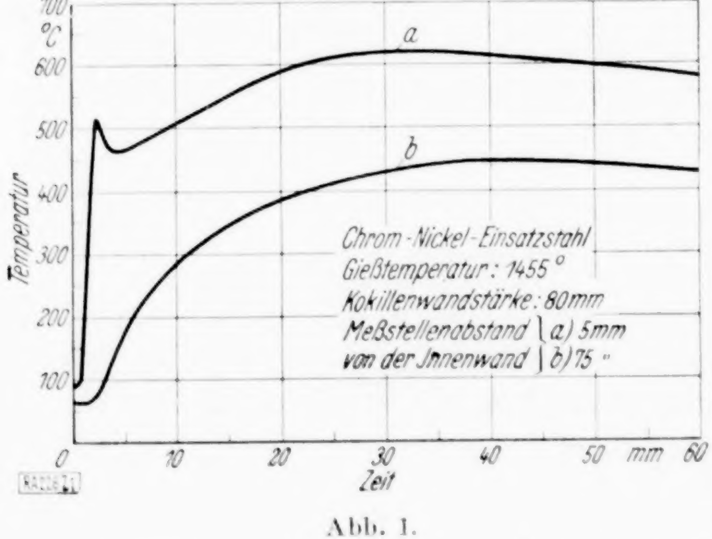


Abb. 1.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, unter Berücksichtigung der drei oben genannten Arbeiten die Ansätze soweit auszubauen, daß sie wenigstens in etwa den praktisch auftretenden Randbedingungen genügen, und gleichzeitig die Tragweite der nicht zu vermeidenden Vereinfachungen kritisch abzuschätzen.

Im allgemeinen kann angenommen werden, daß das flüssige Metall mit der Wand der Gießform oder der Gießpfanne so lange in inniger Berührung

[1]) Science Rep. Tôhoku Univ. 10 (1921), S. 305; s. a. St. u. E. 42 (1922), S. 1249; s. a. Schmidt und Uhink: Mitt. K.-W.-J., Bd. XII, Lief. 20, Abh. 165.

[2]) The Effect of latent heat on the solidification of steelingots. Journ. Iron and Steel Inst. 119 (1929), S. 364/76; s. a. St. u. E. 49 (1929), S. 1276.

[3]) Solidification of steel in the ingot mould. Trans. Am. Soc. Steel Treat. 11 (1921), S. 264.

steht, als die Erstarrung noch nicht eingesetzt hat. Nach dem Einsetzen der Erstarrung ist die Innigkeit der Berührung in Frage gestellt. In erster Annäherung läßt sie sich aber mit großer Wahrscheinlichkeit für eine kurze Zeit auch dann noch als Rechnungsgrundlage benutzen, wenn man mit Rücksicht auf die Messungsergebnisse M a t u s c h k a s[4]) annimmt, daß die Ablösung nicht allmählich, sondern nach einer gewissen Zeit — M a t u s c h k a fand 2 bis 4 Minuten — plötzlich erfolgt. Die in Abb. 1 wiedergegebene Temperaturbewegung, die charakteristisch für eine große Reihe von Messungen[5]) ist, stützt diese Annahme weitgehend.

1. Erstarrung im zweifach unendlich ausgedehnten Körper. Die Kürze der Zeit inniger Berührung legt den Gedanken nahe, die Ansätze zweier einseitig unendlich ausgedehnter Körper zu benutzen, die sich in der Ebene $x = 0$ innig, d. h. ohne Temperatursprung berühren. Die Ausdehnung der Berührungsfläche in der Y- und Z-Richtung kann mit Rücksicht auf die in der Praxis meist vorliegenden Fälle beim Gießen von Blöcken ebenfalls als unendlich angesehen werden, wenn man von Sonderuntersuchungen über den Einfluß der Ecken u. dgl. absieht. Infolgedessen dürfte die räumlich eindimensionale Behandlung des Problems genügen, um einen zuverlässigen Überblick über eine ganze Reihe von Erscheinungen zu bieten. Vom rechnerischen Standpunkt hat man dabei noch den Vorteil, daß sich dabei die für so kurze Zeiten schlecht konvergierenden Reihenentwicklungen umgehen lassen und daß die verschiedenen Stoffkonstanten des flüssigen und festen Metalls sowie der Wand ohne besondere Schwierigkeiten berücksichtigt werden können. Dies schafft weiter die Möglichkeit einer annähernden Beurteilung später nicht zu umgehender Vereinfachungen.

Eine schärfere Umgrenzung der Problemstellung läßt sich also wie folgt geben:

1. a) Zwei Körper mit verschiedenen Temperaturen berühren sich in einer Ebene.
   b) Die Berührung ist so innig, daß ein Temperatursprung nicht stattfindet.
2. a) Die Ausdehnung der Metallmasse in der Richtung $+X$ ist unendlich.
   b) Die Ausdehnung der Wand in der Richtung $-X$ ist ebenfalls unendlich.
   c) In den übrigen Richtungen des Raumes unterliegen Metall und Wand keinerlei Begrenzungen.
3. a) Innerhalb der Metallmasse herrscht zur Zeit $\tau = 0$ überall die einheitliche, über dem Schmelzpunkt liegende Temperatur T_{s_0}.
   b) Innerhalb der Wand herrscht zur $\tau = 0$ überall die einheitliche Temperatur T_{w_0}.
   c) Außer der Erstarrungswärme werden keine latenten Wärmemengen durch irgendwelche Reaktionen innerhalb der Metallmasse oder zwischen Metall und Wand frei.
   d) Die latenten Wärmen tiefer liegender Haltepunkte werden vernachlässigt.
4. Störungen des Temperaturfeldes durch Konvektionsströme treten nicht auf.
5. Die thermischen Stoffkonstanten werden innerhalb größerer Temperaturgrenzen als unabhängig von der Temperatur behandelt. Im übrigen findet aber ihre V e r s c h i e d e n h e i t f ü r d e n f l ü s s i g e n u n d f e s t e n T e i l d e s M e t a l l s s o w i e f ü r d i e W a n d B e r ü c k s i c h t i g u n g.

Unter den Funktionen, die der allgemeinen Wärmeleitungsgleichung genügen[6]), eignet sich für die Behandlung des so umrissenen Problems am besten das Fehlerintegral, das im weiteren Verlauf der Rechnungen dem Vorgehen G r ö b e r s[7]) folgend durch das Symbol:

$$G(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-y^2} \, dy$$ [8])

bezeichnet werden soll. Die Bedeutung der Formelzeichen ist aus der Zusammenstellung in Tafel 1 ersichtlich. Eine schematische Darstellung der Verhältnisse gibt Abb. 2.

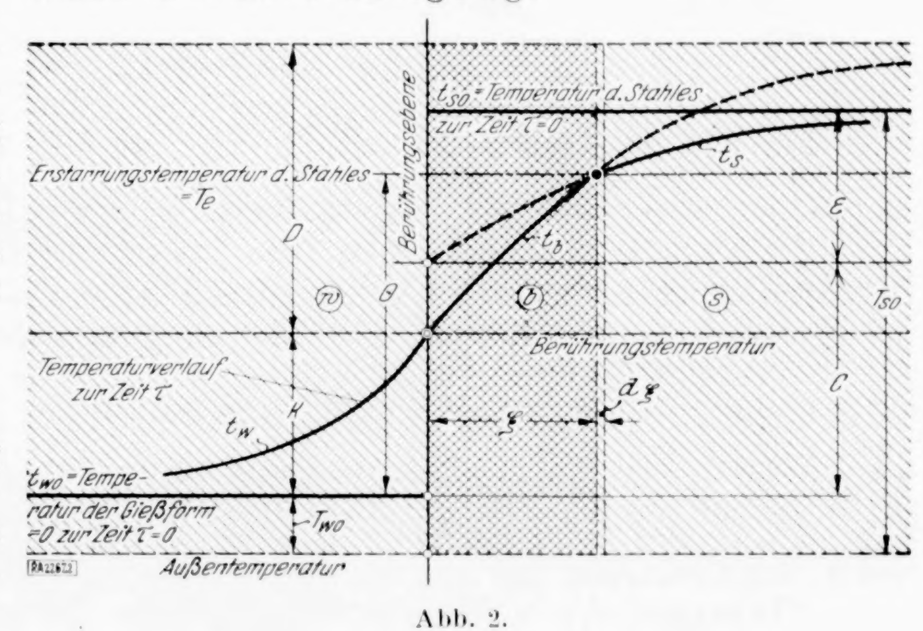


Abb. 2.

4) Arch. Eisenhüttenwesen (1928/29), S. 405/13.
5) Aus der unter 4) zitierten Arbeit.
6) Einachsialer Fall.
7) G r ö b e r : Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges. Berlin, Julius Springer (1921).
8) Werte des Fehlerintegrals. J a h n k e und E m d e : Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner (1909), S. 34. Einen Auszug findet man auch bei Gröber (s. Anm. 6)) und in „Die rechnerische Behandlung der Abkühlungs- und Erstarrungs-Vorgänge bei flüssigem Metall". Arch. Eisenhüttenwesen 4 (1930/31), S. 141.

Tafel 1.

λ Wärmeleitfähigkeit in kcal h^{-1} m^{-1} $Grad^{-1}$,
c spezifische Wärme in kcal kg^{-1} $Grad^{-1}$,
γ spezifisches Gewicht kg m^{-3},
a Temperaturleitfähigkeit $= \frac{\lambda}{c \cdot \gamma}$ m^2 h^{-1},

Die hinzugesetzten Indizes haben die gleichen Bedeutungen wie bei den Temperaturen.

$b = \sqrt{\lambda \cdot c \cdot \gamma}$ kcal m^{-2} h^{-1} $Grad^{-1}$,
Q Schmelzwärme kcal kg^{-1},
T_{w0} wirkliche Anfangstemperatur der Wand,
t_{w0} relative Anfangstemperatur der Wand,
T_{s0} wirkliche Anfangstemperatur des flüssigen Metalls,
t_{s0} relative Anfangstemperatur des flüssigen Metalls,
T_b wirkliche Blocktemperatur,
t_b relative Blocktemperatur,
$\ddot{u}$ Überhitzung,
T_e wirkliche Erstarrungstemperatur,
Θ relative Erstarrungstemperatur,
T_w wirkliche Wandtemperatur,
t_w relative Wandtemperatur,
T_s wirkliche Temperatur des flüssigen Metalls,
t_s relative Temperatur des flüssigen Metalls,
K relative Berührungstemperatur,
C, E, D Berechnungsfestwerte,
x Entfernung von der Berührungsebene beim unendlich ausgedehnten Körper, sonst Bezeichnung für die Abszisse, in m,
ξ Entfernung der Erstarrungsgrenze von der Berührungsebene beim unendlich ausgedehnten Körper, sonst Bezeichnung für die Abszisse der Erstarrungsgrenze,
τ Zeit in Stunden,
z Zeit als abhängige Variable von der Erstarrungsgrenze in h, ausnahmsweise auch in min,
q Konstante der Erstarrung in m,
v_e Erstarrungsgeschwindigkeit in m h^{-1}.

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird für Durchführung der Ableitung der 0-Punkt der Temperaturskala auf Ausgangstemperatur der Wand verlegt; dann ergibt sich für die Temperaturverteilung in Metall und Wand zur Zeit τ der Ansatz:

Für die Wand

$$t_w = K\left(1 - G\left(\frac{x}{2\sqrt{a_w \tau}}\right)\right) \quad \ldots \quad (1).$$

Für den festen Teil

$$t_b = K + D \cdot G\left(\frac{x}{2\sqrt{a_b \tau}}\right) \quad \ldots \quad (2).$$

Für den flüssigen Teil

$$t_s = C + E \cdot G\left(\frac{x}{2\sqrt{a_s \tau}}\right) \quad \ldots \quad (3).$$

Zur Ermittlung der Konstanten dienen die Anfangs- und Wärmeüberleitungsbedingungen an den Grenzen der drei Körper. Aus der Anfangsbedingung folgt:

$$\tau = 0; \quad t_{w0} = 0; \quad t_s = t_{s0} = C + E; \quad C = t_{s0} - E \quad \ldots \quad (4),$$

da $G(\infty) = 1$ ist. An der Berührungsebene, in die man zweckmäßig den Koordinatenursprung für x verlegt, ergibt sich aus der Gleichheit der durchströmenden Wärmemengen und der Voraussetzung, daß ein Temperatursprung nicht auftritt:

$$-\lambda_b \frac{d\, t_b}{\partial\, x_{(x=+0)}} = -\lambda_w \frac{\partial\, t_w}{\partial\, x_{(x=-0)}} \quad \ldots \quad (5),$$

woraus nach Ausführung der Differentiation ohne weiteres

$$\lambda_b \cdot \frac{D}{\sqrt{\pi\, a_b\, \tau}} = \lambda_w \cdot \frac{K}{\sqrt{\pi\, a_w\, \tau}} \quad \text{oder} \quad K = \frac{b_b}{b_w} D \quad \ldots \quad (6)$$

folgt. Die weitere Ableitung der Konstanten D und E kann ganz im Sinn der bekannten Aufgabe „Vordringen des Frostes im feuchten Erdboden“ [9]) durchgeführt werden und braucht daher hier nur kurz skizziert zu werden. Die Abszisse der Erstarrungsebene ξ zur Zeit z ist mit Rücksicht auf die Konstanz der Schmelztemperatur Θ durch die Beziehung:

$$\xi = q\sqrt{z}\,; \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\,\frac{q}{\sqrt{z}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

gegeben. Mit Rücksicht auf (2), (3) und (6) hat man

$$\Theta = D\left(\frac{b_b}{b_w} + G\left(\frac{\xi}{2\sqrt{a_b z}}\right)\right) = (t_{s_0} - E) + E\,G\left(\frac{\xi}{2\sqrt{a_s z}}\right) \quad \ldots \ldots \quad (8),$$

und es folgt, wenn gleichzeitig der Begriff der Überhitzung $\ddot{u} = t_{s_0} - \Theta$ eingeführt wird:

$$D = \frac{\Theta}{\dfrac{b_b}{b_w} + G\left(\dfrac{q}{2\sqrt{a_b}}\right)}\,; \qquad E = \frac{\ddot{u}}{1 - G\left(\dfrac{q}{2\sqrt{a_s}}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

Zur Bestimmung der Erstarrungskonstanten q werden die Wärmeableitungsverhältnisse in der Erstarrungsebene benutzt. Mit Rücksicht auf die räumlich eindimensionale Durchführung können die strömenden Wärmemengen auf die Flächeneinheit und auf das Zeitelement $\partial\tau$ bezogen werden, und man erhält nach dem Schema

Zuströmende Wärme aus dem flüssigen Teil

$=$ Erstarrungswärme der erstarrten Schicht: $\dfrac{\partial \xi}{\partial \tau}$ + abströmende Wärme im festen Teil.

Dies führt zu dem Ansatz:

$$-\lambda_s \cdot \left(\frac{\partial t_s}{\partial x}\right)_{(\xi+0)} = Q \cdot \gamma_s \left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau}\right) - \lambda_b \left(\frac{\partial t_b}{\partial x}\right)_{(\xi-0)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

Die Ausführung der Differentiation von (2), (3) und (6) liefert bei gleichzeitigem Einsetzen in (10)

$$\lambda_b\,D \cdot \frac{e^{-\frac{q^2}{4a_b}}}{\sqrt{\pi a_b z}} - \lambda_s\,E \cdot \frac{e^{-\frac{q^2}{4a_s}}}{\sqrt{\pi a_s z}} = Q\,\gamma_s \cdot \frac{q}{2\sqrt{z}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11),$$

und dies wird durch Einführung der Ausdrücke für die Konstanten D und E nach (9) zu der Bestimmungsgleichung für q:

$$\frac{b_b}{b_s} \cdot \frac{e^{-\frac{q^2}{4a_b}}}{\dfrac{b_b}{b_w} + G\left(\dfrac{q}{2\sqrt{a_b}}\right)} \cdot \Theta - \frac{e^{-\frac{q^2}{4a_s}}}{1 - G\left(\dfrac{q}{2\sqrt{a_s}}\right)} \cdot \ddot{u} = \sqrt{\pi}\,\frac{Q}{c_s}\,\frac{q}{2\sqrt{a_s}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12).$$

Diese Form der Bestimmungsgleichung, entstanden durch die Ausnützung der Beziehungen zwischen dem b-Wert und der Temperaturleitfähigkeit, gibt eine gute Übersicht über die Einflüsse der relativen Erstarrungstemperatur (Θ), was gleichbedeutend mit dem Einfluß der Ausgangswandtemperatur ist, der Überhitzung $\ddot{u}$ und des Wertes Q/c_s, der nichts anderes bedeutet, als die Temperaturerhöhung, die bei entsprechender Unterkühlung durch das plötzliche Freiwerden der Erstarrungswärme hervorgerufen werden würde. Außerdem gestattet sie eine vorläufige Berechnung der Glieder mit dem Hilfswert $\dfrac{q}{2\sqrt{a_s}}$ bzw. $\dfrac{q}{2\sqrt{a_b}}$. Dies ist bei vergleichenden Rechnungen für verschiedene Überhitzungs- und Wandtemperaturen eine nicht zu unterschätzende Erleichterung. Zur Durchführung der Berechnungen wurden in Zahlentafel 2 die für den Stahlwerker wichtigsten Stoffwerte zusammengestellt. Diese Zahlen dürfen allerdings nur als vorläufige Richtwerte beurteilt werden [10]).

[9]) S. a. Gröber Anm. [7]) oder Frank und Mises: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Braunschweig, Friedrich Vieweg und Sohn (1927), S. 220 ff.

[10]) Eine kritische Zusammenstellung dieser Zahlen erfolgt demnächst im Archiv d. Eisenhüttenwesens. Die hier wiedergegebenen Werte dienten als Grundlage der in späteren Abb. gegebenen Berechnungen, die z. T. schon vor längerer Zeit durchgeführt wurden.

Zahlentafel 2.

Stoffwerte (Wärmeleitfähigkeit, spez. Wärme, spez. Gewicht).

Stoff	Wärmeleitfähigkeit λ kcal m^{-1} Grad^{-1}	Spez. Wärme c kcal kg^{-1} Grad^{-1}	Spez. Gewicht γ kg m^{-3}	$a=\frac{\lambda}{c\cdot\gamma}$	$b = \sqrt{\lambda c \gamma}$	$c\cdot\gamma$
Flüssiger Stahl	20 [11])	0,2	7000 [17])	0,0143	167	1400
Fester Stahl oberhalb 800°	25 [11])	0,165 [14])	7500	0,0202	176	1237
Fester Stahl unterhalb 800°	30 [11])	0,140 [14])	7700	0,0278	180	1078
Fester Stahl bei gewöhnlicher Temperatur	40—50	0,120	7850			920
Festes Gußeisen bei 500°	25 [12])	0,140 [15])	7200	0,0248	158	1008
Kupfer bei 200°	330 [13])	0,100	8800	0,375	540	880
Schamotte bei 500 bis 1000°	0,8	0,250 [16])	1800	0,00562	19	450

Von allgemeiner Bedeutung sind 3 Sonderfälle der Gl. (12):

1. $q=0$. Die Erstarrung tritt solange überhaupt nicht ein, als sich die Voraussetzung des zwiefach unendlich ausgedehnten Körpers aufrechterhalten läßt.

2. $\ddot{u}=0$. Das erstarrende Metall befindet sich von Anfang an auf Schmelztemperatur.

3. $b_b=b_w$. Wand und Metall sind der gleiche Stoff. Die Gleichsetzung $b_s=b_w$ erlaubt eine Beurteilung der Wirkung der zur Vereinfachung späterer Rechnungen vorteilhaften Gleichsetzung der Stoffkonstanten des flüssigen und festen Metalls.

Der Fall $q=0$ ist vor allem wichtig für das Verhalten des Metalls in Gießpfannen, da er zwischen der Mindestüberhitzung des Metalls zur Vermeidung von Pfannenbären und der Anfangspfannentemperatur die einfache Beziehung liefert:

$$\ddot{u}_{\min}=\frac{b_w}{b_s}\cdot\Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

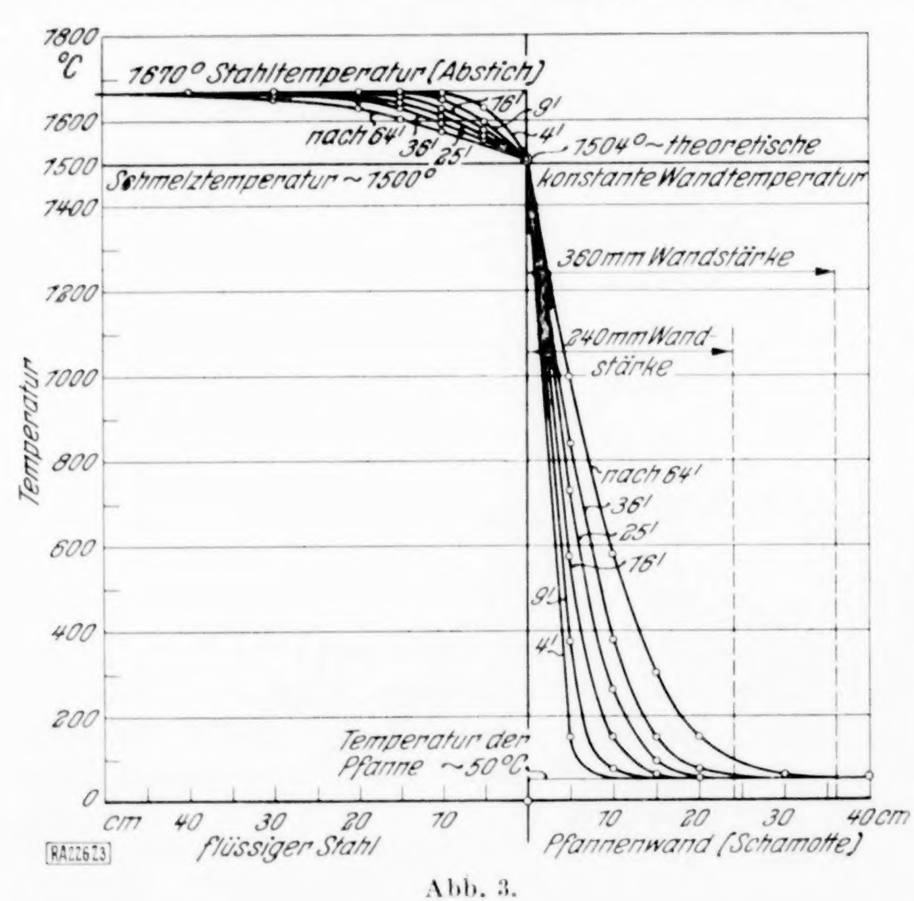


Abb. 3.

Besonders für Metalle, die gegen eine Überhitzung sehr empfindlich sind, ist diese Beziehung von besonderer praktischer Bedeutung, da sie eine einwandfreie Beurteilung der erforderlichen Pfannentemperatur gestattet. Die Zeit, in der sich die Voraussetzung der unendlichen Ausdehnung als unbedenklich erweist, ist um so länger, je größer der Pfannenhalbmesser und je stärker die Pfannenausmauerung bzw. je geringer der b-Wert der Pfannenausmauerung ist. Für die Verhältnisse im Stahlwerk ergaben zahlenmäßige Berechnungen für Pfannenausmauerungen aus Schamotte Zeiten von etwa 36 min für 240 mm und 64 min für 360 mm Wandstärke des

[11]) Die Zahlen sind geschätzt. Lightfoot rechnet mit: $\lambda=35$ kcal m^{-1} h^{-1} Grad^{-1}. A. Schack rechnet für 600° mit $\lambda=32$ kcal m^{-1} h^{-1} Grad^{-1}: St. u. E. 50 (1930), S. 1289. Umfassende Angaben siehe G. Naeser: Wärmeleitfähigkeit, Blatt B. 17. Werkstoffhandbuch Stahl und Eisen (Düsseldorf, Verlag Stahleisen m. b. H. (1928), Blatt 17.

[12]) Geschätzt an Hand der Messungen von Matuschka (berichtigte Abb. 11).

[13]) Landolt-Börnstein: Physikalisch-chemische Tabellen, 5. Aufl., Bd. 2. Berlin, Julius Springer (1923), S. 1292.

[14]) P. Oberhoffer und W. Grosse: St. u. E. 47 (1927), S. 576/82. Die Zahlen oberhalb 1400° wurden zugunsten höherer Werte geändert, da die Messungen von Oberhoffer und Grosse unwahrscheinliche Werte für dieses Temperaturgebiet ergaben. S. a. O. C. Ralstone: Iron oxyde reduction Equilibria. Bulletin 296. Dep. of commerce, Bureau of Mines. U. S. A. Washington 1929.

[15]) Fr. Morawe: Sauerstoffanreicherungen des Gebläsewindes im Kupolofen. Düsseldorf, Gießereiverlag m. b. H. (1930).

[16]) B. Osann: St. u. E. 39 (1909), S. 1111.

[17]) C. H. Desch: J. Iron Steel Inst. 119 (1929), S. 363.

Mauerwerks, nach deren Verlauf erst praktisch merkbare Temperaturerhöhungen an der Außenwand auftreten (Abb. 3).

Ergibt sich $q < 0$, so ist dieser Wert nur für den Fall brauchbar, bei welchem die Wand aus demselben Metall besteht wie der Inhalt der Gießform. Unter diesen Umständen bedeutet q die Konstante für das Abschmelzen der Wand. Damit erledigt sich auch der Fall 3 in seinem ersten Teil ($b_b = b_w$).

Fall 2 läßt Rückschlüsse auf die maximalen Erstarrungsgeschwindigkeiten auch bei Körpern endlicher Ausdehnung zu, insofern als nach Erreichung des Haltepunktes zum mindesten bei räumlich eindimensionaler Betrachtung der auf Schmelztemperatur befindliche Teil des Körpers sich genau so verhalten muß, wie wenn er unendlich ausgedehnt wäre. Diese Betrachtungsweise hat Feild besonders bevorzugt[18]).

Die Besprechung des Falles 3 in seinem zweiten Teil soll später erfolgen. Zunächst muß noch einiges über die Konstanten gesagt werden. Wie aus Abb. 2 hervorgeht, ist die Berührungstemperatur identisch mit der Konstanten K, die sich nach (6) und (9) zu

$$K = \frac{b_b}{b_w} \cdot \frac{\Theta}{\frac{b_b}{b_w} + G\left(\frac{q}{2\sqrt{a_b}}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

ergibt. Ihre Berechnung gibt Aufschluß über die Beanspruchung der Wand. Allerdings darf nicht vergessen werden, daß bei geringer Ausdehnung der Wand die der bisherigen Berechnung zugrunde gelegte Annahme der einseitig unendlichen Ausdehnung sehr bald ihre Gültigkeit verliert. Von diesem Zeitpunkt an steigt aber in den allermeisten Fällen die Berührungstemperatur bis auf ein gewisses Maximum an, dessen Höhe sich nach den Wärmeableitungsverhältnissen an der Außenseite der Wand richtet. Im allgemeinen ist, wenn nicht besondere Maßnahmen zur Kühlung der äußeren Begrenzung der Wand vorgenommen werden, die Wärmeabgabe durch Strahlung und Leitung an der Oberfläche geringer als an der entsprechenden Stelle im einfach unendlich ausgedehnten Körper.

Wenn entsprechend dem Fall 1 eine Erstarrung nicht eintritt, so ergeben sich ohne Schwierigkeit für das Temperaturfeld die Ausdrücke:

1. relative Wandtemperatur

$$t_w = K \cdot \left(1 - G\left(\frac{x}{2\sqrt{a_w \tau}}\right)\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15),$$

2. relative Temperatur des flüssigen Metalls

$$t_s = K \cdot \left(1 + \frac{b_w}{b_s} G\left(\frac{x}{2\sqrt{a_s \tau}}\right)\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16),$$

3. relative Berührungstemperatur

$$K = \frac{t_{s0}}{1 + \frac{b_w}{b_s}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17).$$

Da der 0-Punkt der Temperaturskala auf die Wandtemperatur verlegt wurde, bedeutet t_{s0} stets den Temperaturunterschied zwischen Wand und Metall zur Zeit $\tau = 0$.

Der Fall 3 mit $\frac{b_b}{b_s} = 1$ hat insofern für den Verlauf der weiteren Untersuchung Bedeutung, als er die Wirkungen einer Vereinfachung widerspiegelt, die zur Bewältigung gewisser mathematischer Schwierigkeiten bei der Behandlung des räumlich begrenzten Problems bisher stets gemacht wurde. Diese Vereinfachung besteht in der Vernachlässigung der Unterschiede in den thermischen Stoffwerten zwischen dem flüssigen und festen Metall. Sie ist um so entschuldbarer, als wir vor allem über die Wärmeleitfähigkeit der Metalle im flüssigen Zustand kaum sichere Werte besitzen. Man kann daher an Hand der eingangs gegebenen Formeln zunächst die Erstarrungsgeschwindigkeiten unter schätzungsweiser Berücksichtigung der thermischen Stoffwerte beider Phasen den Wert q, der ja ein Maß für die Erstarrungsgeschwindigkeit des gerade vorliegenden Falles angibt, errechnen und dann die Stoffwerte so mitteln, daß für die als Rechnungswert für beide Phasen gemeinsam angenommenen Stoffwerte die gleiche Erstarrungsgeschwindigkeit erfolgt. Hält sich dann der Unterschied zwischen der Temperaturleitfähigkeit a_b des festen Teiles und dem angenommenen

[18]) S. Anmerkung [3]).

Mittelwert a_m in mäßigen Grenzen, so verhalten sich nach (14) die relativen Berührungstemperaturen K für die wirklichen und die auf Grund der Mittelnahme sich errechnenden Werte wie die b-Werte des flüssigen zu denen des festen Metalls, d. h.

$$K_m : K_{\text{wirkl.}} = b_s : b_b .$$

Daß die Betrachtungen des Problems unter den bisherigen Gesichtspunkten wenigstens qualitativ ausreichen, um die der Messung am allerschwierigsten zugänglichen Verhältnisse in den ersten Minuten nach dem Guß weitgehend zu beurteilen, zeigen Messungen von Leitner[19]). Die Wandstärke verschiedener unter gleichen Bedingungen gegossener Chromnickelstahlblöcke, die nach verschiedenen Zeiten umgeworfen wurden, so daß nur die erstarrte Wandstärke übrigblieb, während das flüssige Metall herausfloß, ergeben bis zur sechsten Minute für das Wachstum dieser Wandstärke das Gesetz $\xi = 0{,}228 \sqrt{\tau}\, m$, wobei τ in Stunden einzusetzen ist. Demnach würde sich dann die Ausbildung des als Transkristallisation bekannten Randgefüges gegossener Blöcke als die Folge des Durchlaufens bestimmter Erstarrungsgeschwindigkeiten darstellen, deren Beeinflussung durch die Gießbedingungen an Hand der bisher abgeleiteten Formeln wenigstens qualitativ abgeschätzt werden kann.

2. Räumliches Problem. Die Fortführung der mathematischen Behandlung des Problems über den Zeitpunkt hinaus, von dem ab eine Aufrechterhaltung der Annahme unendlicher Ausdehnung nicht mehr möglich ist, kommt vom praktischen Standpunkt in Frage zur Beurteilung der Abkühlungs- und Erstarrungsbedingungen nach dem Guß — Zeitpunkt der Verfestigung nach dem Gießen, Beeinflussung der Abkühlung zur Vermeidung von Rissen u. dgl. mehr — und zur Beurteilung der Wirksamkeit von Isolierungen und der Vorwärmung von Transportgefäßen für flüssiges Metall. (Transporte flüssigen Metalls über weite Strecken!) Im letzteren Fall handelt es sich im Gegensatz zum ersteren darum, ein Einfrieren des Metalls möglichst lange Zeit hintanzuhalten. Da der „erstarrungsfreie Fall" der geläufigen Lösung unter vereinfachten Annahmen am meisten ähnlich ist, sei er hier vorweggenommen.

2a. Erstarrungsfreier Fall. Das Kriterium für das Vorliegen des erstarrungsfreien Falles liefert für die praktisch in Frage kommenden Verhältnisse Gl. (13), insofern als sie bei gegebenem Schmelzpunkt sofort erkennen läßt, ob sich bei bestimmter Überhitzung und Wandtemperatur eine Berührungstemperatur einstellt, die über dem Schmelzpunkt liegt. Nur wenn dies der Fall ist, soll von einem „erstarrungsfreien Fall" gesprochen werden. Außerdem soll diese Bezeichnung nur andeuten, daß vom Beginn des Abkühlungsvorganges an eine gewisse Zeit vergeht, ehe sich eine Schale an der Wand ansetzt. Gerade die Frage, wie lange der erstarrungsfreie Fall vorliegt, bildet einen wesentlichen Punkt der Problemstellung.

Unter den Funktionen, die der allgemeinen Wärmeleitungsgleichung genügen, eignen sich hier am besten die Zylinder-Funktionen, da sie die Behandlung der räumlich zweidimensionalen Aufgabe mit einer variablen Koordinate gestatten. Die räumlich dreidimensionale Lösung läßt sich ohne weiteres durch Hinzunahme der Kreisfunktionen aufbauen. Doch steigt dadurch die Zahlenarbeit so sehr, daß man dies nur zur Klärung ganz bestimmter Fragen — Verhalten der Ecken — durchführen wird. Dazu kommt noch, daß man dann nur die Verhältnisse scharfer Ecken erhält, wie sie in der Praxis nie auftreten. Begünstigt wird diese Behandlung der Frage dadurch, daß es sich gerade bei den Transportgefäßen für flüssiges Metall meist um zylindrische Gefäße handelt. Der Einfluß der Bodenfläche und des freien Metallspiegels, der übrigens in den meisten Fällen durch einen Deckel oder eine gut isolierende Schlackendecke geschützt ist, wird sich zudem erst zu einem Zeitpunkt geltend machen, in dem von einem Vorliegen des erstarrungsfreien Falles keine Rede mehr sein kann.

Die grundlegenden Annahmen werden am besten im Vergleich mit den Voraussetzungen im ersten Teil dieser Arbeit umrissen. Es ergibt sich:

1. a) Die Berührungsfläche zwischen Metall und Gefäßwand ist eine Zylinderfläche, im Gegensatz zur Annahme einer Ebene.
   b) Die Berührung ist so innig, daß ein Temperatursprung nicht auftritt.
2. a) In der Richtung der X- und Y-Achse ist das System durch eine Zylinderfläche begrenzt. Als Randbedingung tritt die Bedingung 3. Art in der Form
   $$-\lambda \frac{\partial t}{\partial r} = a\, t \text{ auf } (a = \text{Wärmezahl}).$$
   b) In der Richtung der Zylinderachse ist der Zylinder unbegrenzt. Temperaturunterschiede treten in dieser Richtung nicht auf.

[19]) Leitner: St. u. E. 50 (1930), S. 1084.

3. Zu den Bedingungen a) bis d) kommt noch hinzu: e) Die Temperatur ist nur vom Radiusvektor r abhängig.
4. Konvektionsströme, die nicht eventuell durch eine Erhöhung der Wärmeleitfähigkeit berücksichtigt werden können, treten nicht auf.
5. Die Verschiedenheit der Stoffkonstanten zwischen Metall und Wand werden berücksichtigt. Beim Einsetzen der Erstarrung wird die Rechnung entweder abgebrochen oder die Eigenwerte des Problems so verändert, daß sie für mittlere Stoffkonstanten des flüssigen und festen Zustandes passen.

Mit Rücksicht auf die allgemeine Differential-Gleichung der Wärmeleitung, die für Zylinderkoordinaten unter der Voraussetzung, daß die Temperatur allein vom Radiusvektor abhängt, die Form annimmt

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial_2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r}\right),$$

läßt sich für das Temperaturfeld im flüssigen Metall die Funktion $t = U(r, \tau)$ und für das Feld in der Gefäßwand die Funktion $t = V(r, \tau)$ in folgender Form ansetzen:

$$U = \sum_{i=1}^{i=\infty} C_i e^{-m_i^2 a_s \tau} J_0(m_i r) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18),$$

$$V = \sum_{i=1}^{i=\infty} C_i e^{-n_i^2 a_w \tau}(c_{1i} J_0(n_i r) + c_{2i} Y_0(n_i r)) = \sum_{i=1}^{i=\infty} C_i e^{-n_i^2 a_w \tau} Z_0(n_i r) \quad \ldots \quad (19).$$

Dabei bedeuten die Symbole J_p, Y_p, Z_p die Besselschen Zylinderfunktionen p^{ter} Ordnung nach den Definitionen von Jahnke und Emde[20]). Als Randbedingungen treten auf:

1. Für $r = d$:

$$V = U; \quad -\lambda_w \cdot \frac{\partial V}{\partial r_{(r=d)}} = -\lambda_s \frac{\partial U}{\partial r_{(r=d)}} \quad \ldots \ldots \quad (20).$$

2. Für $r = R$:

$$-\lambda_w \frac{\partial V}{\partial r_{(r=R)}} = \alpha \cdot V \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

mit d als Halbmesser der Berührungsfläche und R als Halbmesser der äußeren Gefäßwand. Da die auftretenden Reihen eine gliedweise Behandlung zulassen, sind im folgenden die Ordnungszeiger i fortgelassen und die Ableitungen mit einem Glied durchgeführt. Die Unabhängigkeit der willkürlichen Konstanten von der Zeit erfordert

$$m^2 a_s = n^2 a_w \quad \text{oder} \quad m = n\sqrt{\frac{a_w}{a_s}} = n \cdot A \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22),$$

dabei weisen die Zeiger s auf thermische Festwerte des Metalls und w auf solche der Wand hin. A ist das Wurzelverhältnis der Temperaturleitfähigkeiten. Die Konstante C muß sowohl für den Bereich des Metalls als auch für den der Wand bei allen zusammengehörigen Gliedern den gleichen Wert erhalten, bleibt aber im übrigen der Anpassung an die Anfangsbedingungen vorbehalten. Zur Befriedigung der Randbedingungen bleiben demnach für jedes Glied zwei weitere willkürliche Konstanten c_1 und c_2 und der Eigenwert n der Differentialgleichung übrig. Da die Randbedingungen sich durch die unter (20) und (21) zusammengefaßten 3 Gleichungen ausdrücken lassen, ist die Anwendung eines Wertesystems von 3 Werten nötig und ausreichend.

Das Gleichungspaar (20) fordert:

$$J_0(m d) = c_1 J_0(n d) + c_2 Y_0(n d) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23),$$

$$\lambda_s m J_1(m d) = \lambda_w n (c_1 J_1(n d) + c_2 Y_1(n d)) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24).$$

Daraus folgt nach Einführung von A entsprechend der Festsetzung in (22) und unter Benutzung der kombinierten Stoffwerte a und b (siehe Zusammenstellung in Zahlentafel 1)

$$c_1 = \frac{b_s J_1(m d) - b_w c_2 Y_1(n d)}{b_w J_1(n d)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (25),$$

$$c_2 = n \cdot d\left[J_1(n d) J_0(m d) - \frac{b_s}{b_w} \cdot J_0(n d) \cdot J_1(m d)\right] \ldots \ldots \quad (26a),$$

$$c_1 = n d \cdot \left[\frac{b_s}{b_w} Y_0(n d) \cdot J_1(m d) - Y_1(n d) J_0(m d)\right] \ldots \ldots \quad (26b).$$

[20]) Jahnke und Emde: Funktionen-Tafeln, s. Anmerkung [8]).

Die an sich einfacher aussehende Beziehung (25) ist zur Berechnung von c_1 unter Einsatz der gefundenen Werte für c_2 nicht brauchbar, da die Tafelwerte infolge ihrer natürlichen Ungenauigkeiten besonders für die 0-Stellen von $J_1(n\,d)$ stark streuende Werte liefern[21]). Für $b_s = b_w$ wird $c_1 = 1$ und c_2 verschwindet, so daß dann von selbst die für Temperaturfelder mit einheitlichen Stoffwerten bekannten Ausdrücke entstehen.

Zur Befriedigung der Bedingung (21) muß sein

$$\lambda_w \cdot n\,Z_1(n\,R) = a\,Z_0(n\,R) \quad \text{. . . . . (27).}$$

Dies führt zu

$$\lambda_w \frac{n}{a} = \frac{Z_0(n\,R)}{Z_1(n\,R)} \quad \text{. . . . . (28)}$$

oder allgemeiner mit $\nu = n\,R$ und $\frac{a}{\lambda} = h$

$$\frac{\nu}{h\,R} = \frac{Z_0(\nu)}{Z_1(\nu)} \quad \text{. . . . . (28a).}$$

Durch die Festsetzung $d = \varrho \cdot R$, so daß ϱ zum Durchmesserverhältnis wird, erreicht man, daß die gesuchten Werte alleinige Funktionen von ν werden; darauf kann dann ihre graphische Ermittlung aufgebaut werden. Vor ihrer Erörterung soll jedoch noch eine Verallgemeinerung besprochen werden, die sich darauf bezieht, daß keine innige Berührung vorliegt, sondern daß an der Berührungsfläche die durch sie hindurchfließende Wärmemenge W proportional dem auftretenden Temperatursprung ist, d. h. daß man für sie das allgemeine Gesetz aufstellen kann:

$$W = k \cdot (t_s - t_w) \quad \text{. . . . . (29).}$$

Die Größe der Wärmeübergangszahl k bleibe vorläufig dahingestellt. Die eingangs definierten Annahmen bleiben bestehen mit Ausnahme von 1 b). Sie ändert sich und lautet:

1\. b) An der Berührungsstelle treten Wärmeübergangswiderstände auf. Die von einem zum andern Körper fließende Wärmemenge ist proportional einer Wärmeübergangszahl k und dem auftretenden Temperatursprung. Ein etwa auftretender Spalt, wie z. B. bei der Abkühlung bereits erstarrter Metalle in ihrer Gießform, sei räumlich so klein, daß seine Ausdehnung vernachlässigt werden kann.

Die Ansätze (18) und (19) bleiben die gleichen, ebenso die Bedingung (21), die nur der Übersichtlichkeit halber wiederholt wird. Dagegen ändert sich (20) sinngemäß. Man erhält:

1\. Für $r = d$:

$$-\lambda_s \frac{\partial u}{\partial r_{(r=d)}} = -\lambda_w \cdot \frac{\partial V}{\partial r} = k\,(U - V) \quad \text{. . . . . (30).}$$

2\. Für $r = R$:

$$-\lambda_w \frac{\partial V}{\partial r_{(r=R)}} = a \cdot V \quad \text{. . . . . (31).}$$

An Stelle von (23) und (24) tritt:

$$\lambda_s\, m\, J_1(m\,d) = k \cdot [J_0(m\,d) - c_1\, J_0(n\,d) - c_2\, Y_0(n\,d)] \quad \text{. . . . . . . (32),}$$

$$\lambda_s\, m\, J_1(m\,d) = \lambda_w\, n\,[c_1\, J_1(n\,d) + c_2\, Y_1(n\,d)] \quad \text{. . . . . (33).}$$

Die Auflösung dieses Gleichungspaares nach c_1 und c_2 liefert:

$$c_2 = n\,d \left| J_1(n\,d)\,J_1(m\,d) - \frac{b_s}{b_w} J_0(n\,d) \cdot J(m\,d) - \frac{\lambda_s\, m}{k} J_1(m\,d) \cdot J_1(n\,d) \right| \quad \text{. . . (34),}$$

$$c_1 = n\,d \left[\frac{b_s}{b_w} \cdot Y_0(n\,d)\,J_1(m\,d) - Y_1(n\,d) \left\{ J_0(m\,d) - \frac{\lambda_s\, m}{k} \cdot J_1(m\,d) \right\} \right] \quad \text{. . . . . (35).}$$

Aus (34) und (35) entsteht ohne weiteres (25) und (26), sobald k unendlich groß wird. Dadurch charakterisiert sich der Fall inniger Berührung ohne weiteres als Sonderfall des zuletzt behandelten Problems. Zur Befriedigung der Bedingung (21) können die Formeln (27) bis (28a)

[21]) Eine ausführliche Zusammenstellung der Formeln für die Zylinderfunktionen findet man ebenfalls bei Jahnke und Emde. Außerdem ist für Vereinfachungen die Beziehung:

$$x \cdot (Y_0(x) \cdot J_1(x) - J_0(x) \cdot Y_1(x) = 1$$

von Bedeutung, die sich nach den dort gegebenen Definitionen, die auch den Zahlentafeln zugrunde liegen, ergeben. Mit den von Frank und Mises angegebenen Definitionen ergibt sich der Wert des Ausdruckes zu $\frac{2}{\pi}$.

unverändert benützt werden. Zur graphischen Auflösung berechnet man mit Hilfe des Durchmesser-Verhältnisses zunächst die Konstanten c_1 und c_2 als Funktionen von ν, wobei an Stelle von $n \cdot d : \nu \cdot \varrho$ tritt und $m \cdot d$ mit Rücksicht auf (22) zu $A\,\nu\,\varrho$ wird. Dann folgt die Berechnung von $Z_0(\nu)$ und $Z_1(\nu)$ und ihres Quotienten entsprechend (28a). Dabei werden jedoch die c_1- und c_2-Werte nicht als Konstante, sondern als Funktionen von ν eingesetzt. Die resultierenden Kurven ergeben einen ähnlichen Verlauf wie Tangenskurven. Ihre Schnittpunkte mit der Geraden $\frac{\nu}{h\,R}$ ergeben die jeweiligen Lösungen für ν und damit die zugehörigen Werte von c_1 und c_2. Da in (34) und (35) der Faktor $\frac{\lambda_s}{k} \cdot m$ auftritt, bei dessen Umrechnung auf ν im Nenner R erscheint, ergeben sich für verschiedene Außendurchmesser $= 2R$ und gleiche Durchmesser-Verhältnisse ϱ nur dann gleiche Lösungen für ν, wenn $k \cdot R$ konstant wäre, oder wenn $k = \infty$ wird. Daraus folgt, daß bei Auftreten eines Wärmeübergangswiderstandes die Berechnung jedesmal neu durchgeführt werden muß, sobald sich R oder d ändern. Nur bei alleiniger Veränderung der äußeren Wärmeleitfähigkeit α kann ein Teil der Berechnungen wieder benutzt werden, da in diesem Fall bloß die Gerade $\frac{\nu}{h\,R}$ ihren Winkel zur ν-Achse ändert. Die aufeinanderfolgenden Schnittpunkte geben die zugehörigen Wertesysteme für m, n; c_1 und c_2 für die einzelnen Glieder in der Reihenfolge ihrer Ordnung an. Bei der Auswertung des Temperaturfeldes sind dann selbstverständlich c_1 und c_2 als Konstante zu behandeln.

Ist der zu untersuchende Körper aus mehreren Schalen verschiedener thermischer Eigenschaften zusammengesetzt, zwischen denen Wärmeübergangsbedingungen herrschen, die durch (29) dargestellt werden können, so ist der Ansatz (30) bis (35) sinngemäß unter Einführung neuer Eigenwerte zu wiederholen. Man erhält dann für jede Schale neue Wertesysteme c_1, c_2, n, deren Ermittlung in analoger Weise, wie oben angedeutet, erfolgen kann.

Zur Anpassung der auf diese Weise gefundenen Funktionen an die Anfangstemperaturverteilung, also zur Ermittlung der Konstanten C_i müssen ihre Orthogonalitätsbedingungen berücksichtigt werden. Dies geschieht am einfachsten in strenger Anlehnung an die von Frank und Mises[22]) in klassischer Form gegebene Darstellung des Entwicklungssatzes. Ihre Wiedergabe soll allgemein erfolgen, so daß sie auch benutzt werden kann, wenn das hier behandelte Problem die Anwendung von Kreis- oder Kugelfunktion erfordert. Ausgehend von der „selbstadjungierten" Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[r(x)\,y'\right] + \left[q(x) + \lambda \cdot p(x)\right] y = 0 \quad \ldots \quad (36),$$

in welche die allgemeine Differentialgleichung der Wärmeleitung durch den Ansatz $e^{-m^2 a \tau} F(m\,x)$ und entsprechende Wahl der Funktionen $r(x), q(x)$ und $p(x)$ stets gebracht werden kann, erhält man mit

$$r(x) = x; \quad p(x) = x \text{ und } q(x) = 0; \quad y = F(m\,x); \quad \lambda = m^2 \quad \ldots \quad (37),$$

$$x \cdot y' + m^2 x\,y = 0 = y'' + \frac{1}{x} \cdot y' + m^2 y \quad \ldots \quad (38).$$

Dies entspricht der eingangs angegebenen Form der allgemeinen Differentialgleichung für unsern Fall. Für Kreisfunktionen beispielsweise wäre $r(x) = p(x) = 1$ zu wählen gewesen, da in diesem Fall die Differentialgleichung $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial_2 t}{\partial x^2}$ gelautet hätte.

„Multipliziert man die für y_i geltende Gl. (38) mit y_k und zieht sie dann von der unter Vertauschung von i und k entsprechend gebildeten Gleichung ab, so erhält man nach Integration beider Seiten in den Grenzen von a bis b[23])"

$$\left[x\,(y_i\,y_k' - y_k\,y_i')\right]_a^b = (m_i^2 - m_k^2) \int_a^b x\,y_i\,y_k\,\partial x \quad \ldots \quad (39).$$

Für unser Problem gilt ferner

1. für $r = 0$ mit Rücksicht auf die Symmetrie

$$\frac{\partial U}{\partial r_{(r=0)}} = 0 \quad \ldots \quad (40),$$

[22]) Frank und Mises: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Braunschweig, Fr. Vieweg und Sohn (1927), Bd. I, S. 227 ff.

[23]) Wörtlich nach Frank und Mises l. c.

2. für $r = d$ nach (30)

$$-\frac{\partial U}{\partial r_{(r=d)}} = \frac{k}{\lambda_s}(U-V) = h_s(U-V) \quad \ldots \quad (41),$$

$$-\frac{\partial V}{\partial r_{(r=d)}} = \frac{k}{\lambda_w}(U-V) = h_w(U-V) \quad \ldots \quad (42),$$

3. für $r = R$ nach (31)

$$\frac{\partial V}{\partial r_{(r=R)}} = \frac{a}{\lambda_w} \cdot V = h \cdot V \quad \ldots \quad (43).$$

Setzt man für den Augenblick in (39) an Stelle von x die Variable r und an Stelle von U und V zur Kennzeichnung des Umstandes, daß es sich um partielle Lösungen handelt, u und v, so erhält man bei entsprechender Wahl der Grenzen zwischen 0 und d bzw. d und R

$$(m_i^2 - m_k^2)\int_0^d x \cdot u_i \cdot u_k \, \partial x = [x(u_i u_k' - u_k u_i')]_0^d = h_s d (u_i v_k - u_k v_i)_{(x=d)} \quad \ldots \quad (44),$$

$$(n_i^2 - n_k^2)\int_d^R x \cdot (v_i v_k) \, \partial x = [x(v_i \cdot v_k' - v_k v_i')]_d^R = h_w d (u_k v_i - u_i v_k)_{(x=d)} \quad \ldots \quad (45)$$

Multipliziert man (44) mit a_s und (45) mit a_w und berücksichtigt man, daß $m^2 a_s = n^2 a_w$ gesetzt wurde (22), so folgt aus (44) und (45):

1. Für $i = k$

$$c_s \gamma_s \int_0^d x \, u_i u_k \, \partial x = - c_w \gamma_w \int_d^R x \, v_i v_k \, \partial x \quad \ldots \quad (46),$$

2. daß für $i = k$ jedoch die Integrale ihren Wert behalten, da die linke Seite beider Gleichungen bereits durch den Klammerfaktor zum Verschwinden gebracht wird.

Ansatzgemäß gilt für $\tau = 0$

$$F(r) = U(r) = C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3 \ldots\ldots \text{ im Bereich von 0 bis } d \quad \ldots \quad (47),$$

$$F(r) = V(r) = C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3 \ldots\ldots \text{ im Bereich von } d \text{ bis } R \quad \ldots \quad (48).$$

Multipliziert man nun (47) mit $c_s \cdot \gamma_s \cdot r \cdot u_i$ und integriert von C bis d und (48) mit $c_w \cdot \gamma_w \cdot r \cdot v_i$ und integriert von d bis R, so erhält man nach Addition der auf diese Weise entstandenen Gebilde, da rechts alle Glieder mit ungleichen Ordnungszeigern verschwinden,

$$c_s \gamma_s \int_0^d r \, F(r) \cdot u_i \cdot dr + c_w \gamma_w \int_d^R r \, F(r) \, v_i \, \partial r = C_i \left[c_s \gamma_s \int_0^d r \, u_i^2 \, \partial r + c_w \gamma_w \int_d^R r \, v_i^2 \, \partial r\right] \quad . \quad (49),$$

woraus ohne Schwierigkeit bei vorgegebener Anfangstemperaturverteilung $t = F(r)$ für jedes Glied die entsprechende Konstante C_i zu:

$$C_i = \frac{c_s \gamma_s \int_0^d r \, F(r) \, u_i \, \partial r + c_w \gamma_w \int_d^R r \, F(r) \, v_i \, \partial r}{c_s \gamma_s \int_0^d r \, u_i^2 \, \partial r + c_w \gamma_w \int_d^R r \, v_i^2 \, \partial r} \quad \ldots \quad (50)$$

folgt. Für den vorliegenden Fall wird daraus nach Einführung der Zylinderfunktionen entsprechend (18) und (19) und unter der Annahme, daß in den einzelnen Schalen sowie im Kern die Anfangstemperaturen zwar in den verschiedenen Körpern verschieden innerhalb jedes einzelnen jedoch konstant sind.

$$C_i = 2 \cdot \frac{t_{s0} \cdot c_s \gamma_s \frac{d}{m_i} J_1(m_i d) + t_{w0} c_w \gamma_w \cdot \frac{1}{n_i}[R \, Z_1(n_i R) - d \, Z_1(n_i d)]}{c_s \gamma_s d^2 [J_0^2(m_i d) + J_1^2(m_i d)] + c_w \gamma_w \{R^2 [Z_0^2(n_i R) + Z_1^2(n_i R)] - d^2 [Z_0^2(n_i d) + Z_1^2(n_i d)]\}} \quad (51).$$

Für Körper mit mehreren Schalen liefert die analoge Durchführung des Verfahrens ohne Schwierigkeit die entsprechenden Formeln. Infolgedessen kann auf ihre Wiedergabe verzichtet werden.

2b. Berücksichtigung der Erstarrung durch sich überlagernde Temperaturverteilungen. Sobald mit fortschreitender Zeit das erste Stadium des Temperaturausgleiches vorüber ist, in dem sich Unstetigkeiten so ausgleichen, als ob ein unendlich ausgedehnter Körper vorläge, weil die durch sie hervorgerufenen anfänglich sehr schnellen Temperaturbewegungen die räumliche Begrenzung des Körpers praktisch noch nicht erreicht haben, bereitet die Berücksichtigung der Erstarrungswärme für den allgemeinen Fall ziemliche Schwierigkeiten. Der Weg der Gleichsetzung der an der Erstarrungsgrenze zu- und abströmenden bzw. freiwerdenden Wärmemengen, wie er sich in allgemeiner Form in Gl. (10) widerspiegelt, ist hier nicht ohne weiteres gangbar, weil die erforderlichen Reihenentwicklungen eine explizite Form für die Raumkoordinaten als Funktionen von Temperatur und Zeit nicht zulassen.

Eine Möglichkeit, die H. Schmidt und Uhink sowie S. Saitô[3]) ausgenutzt haben, besteht darin, die bei der Erstarrung des Grenzschichtendifferentials freiwerdende Wärmemenge als Wärmequelle aufzufassen. Allerdings muß dann von einer Näherung für die Erstarrungsgeschwindigkeit ausgegangen werden. Stellt man sich eine Schicht flüssigen Metalls von der Stärke dx vor, die durch irgendwelche im Augenblick belanglose Vorkehrungen weitgehend unterkühlt wurde, so besteht zum mindesten theoretisch die Möglichkeit, ihre Erstarrung plötzlich und adiabatisch vorsichgehen zu lassen. Die bei der Erstarrung freiwerdende Wärmemenge sei q kcal/kg, die spezifische Wärme des festen Metalls sei c. Die freiwerdende latente Wärme ist dann imstande, das Metall um die Temperaturspanne $E = q/c$ zu erwärmen. Je nachdem, wie weit die Unterkühlung getrieben wurde, können zwei Fälle eintreten.

1. Die Unterkühlung hat so tiefe Temperaturen erreicht, daß bei der Erstarrung — andere wärmespendende Umwandlungen sind genau so zu behandeln — der Schmelzpunkt (Umwandlungspunkt) des Metalls nicht mehr erreicht wird. Dann wird die Temperaturerhöhung $E = q/c$ in ihrem vollen Betrage zur Geltung kommen. Der Vorgang wird einmal eingeleitet in allen Teilen des Metalls gleichzeitig und nach Art des Verschwindens einer instabilen Phase vorsichgehen, wenn der Betrag der Unterkühlung überall die Größe E unterschritten hat.

2. Die Unterkühlung ist an einzelnen Stellen geringer als die Temperaturerhöhung E, die als Folge der Erstarrung der ganzen Metallschicht auftreten müßte. Da der ganze Vorgang adiabatisch geleitet werden soll, werden nur die Teile erstarren können, deren Unterkühlung weit genug getrieben wurde. Sie werden dann als Erstarrungszentren fungieren, während der übrige Teil der Schmelze höchstens die Erstarrungstemperatur erreichen kann, da die feste Phase oberhalb der Erstarrungstemperatur nicht existenzfähig ist. Über die erstarrte Metallmenge läßt sich sofort die Aussage machen, daß die durch ihre Erstarrung freigewordene Wärmemenge nicht größer sein kann, als zur Aufheizung des flüssigen Restes auf Erstarrungstemperatur erforderlich ist. Ein weiteres Fortschreiten der Erstarrung ist an die Aufhebung der Voraussetzung gebunden, daß der Vorgang in dem betreffenden Bereich des Metallkörpers adiabatisch erfolgt.

Vergleicht man diese Gedankengänge mit den Theorien Tammanns, so ergibt sich zunächst für den Fall 1, daß unter diesen Voraussetzungen die Erstarrung bzw. Umwandlung nur dann plötzlich vorsichgehen kann, wenn die Kristallisationsgeschwindigkeit, genauer definiert als Kristallwachstumsgeschwindigkeit, im Verein mit der vorhandenen Kernzahl die Umwandlungsgeschwindigkeit $v_e = \infty$ ergibt. Für den Fall 2 läßt sich weiter die Folgerung ziehen, daß unter Umständen nicht zusammenhängende Räume des Metallköspers umgewandelt werden, während andere ebenfalls zusammenhängende Räume noch flüssig bleiben, bzw. im Zustand der instabilen Phase bei Umwandlungstemperatur verharren, d. h. daß sich entsprechend der Verteilung der Kerne um diese herum Erstarrungszentren bilden, die räumlich über die ganze Metallmasse verteilt sind. Diese heizen dann während ihrer Erstarrung ihre Umgebung auf Erstarrungstemperatur bzw. Umwandlungstemperatur auf. Das Wachstum dieser Erstarrungszentren muß sein Ende finden, wenn die gesamte Metallmasse die Umwandlungstemperatur erreicht hat. Das Endergebnis wäre eine halbflüssige Metallmasse, in welcher die Kristalle herumschwimmen, bzw. je nach ihrem spezifischen Gewicht absinken oder aufsteigen. Läßt man nun ein Abfließen der Wärme nach irgendeiner Richtung zu, so ergeben sich wieder zwei Fälle:

a) Die abfließenden Wärmemengen sind verhältnismäßig klein. Es bildet sich eine Erstarrungsgrenze, deren Fortschreiten Umwandlungsgeschwindigkeiten bedingt, die kleiner sind als die Höchstwerte der sich aus Kristallwachstumsgeschwindigkeit und vorhandener Kernzahl ergebenden möglichen Umwandlungsgeschwindigkeit. Dann wird an der Erstarrungsgrenze die Erstarrungstemperatur unverändert fortbestehen bleiben, und das Fortschreiten der Erstarrungsgrenze selbst wird sich nach den Gesetzen vollziehen, die die Wärmeableitungsverhältnisse diktieren.

b) Die Wärmeableitungsverhältnisse erzwingen den Abfluß sehr großer Wärmemengen. Unter der Voraussetzung, daß Kristallwachstumsgeschwindigkeit und Kernzahl die Umwandlungsgeschwindigkeit bei einem endlichen Wert limitieren, ist dann der Fall möglich, daß die abströmende Wärmemenge über die Erstarrungsgrenze hinaus Temperatursenkungen erzwingt, so daß wiederum einzelne Partien des Metallkörpers unterkühlt werden. Ist in diesem Falle der flüssige Metallkörper mit Kristallen durchsetzt, so ist die Möglichkeit gegeben, daß in einem gewissen Bereich diese Kristalle in einer unterkühlten Umgebung nach Maßgabe ihrer maximalen Wachstumsgeschwindigkeit so lange weiter wachsen, bis die flüssige Phase aufgezehrt ist. In diesem Falle würde ein Umwandlungspunkt an keiner Stelle der Metallmasse in Erscheinung treten. Die rechnerische Behandlung dieses Problems wäre mit Hilfe der Quellenlösung ohne weiteres zu meistern, sobald man entsprechende Werte für die maximale Kristallwachstumsgeschwindigkeit und eine der vorhandenen Kernzahl entsprechende raumgitterartige Anordnung der Wärmequellen in die Rechnung einführt. Erfahrungsgemäß treten aber bei der Erstarrung ausgesprochene Haltepunkte auf. Versteht man nun unter „teilweiser Unterkühlung", daß die Unterkühlung nur in einem bestimmten Raum groß genug ist, um eine vollständige Erstarrung ohne Überschreitung des Umwandlungspunktes zuzulassen, so wird die Verfestigung des übrigen Teiles nach Erreichung der Umwandlungstemperatur nach den in Fall a gegebenen Gesichtspunkten vorsichgehen.

Da über die maximale Erstarrungsgeschwindigkeit zur Zeit keine Werte vorliegen, die man mit einiger Sicherheit als Grundlage einer Berechnung benutzen kann, ist es zunächst besser, die Berechnungen ohne Berücksichtigung der Unterkühlungserscheinungen durchzuführen. Sie können dann als Ausgangspunkt der weiteren Erforschung des ganzen Fragenkomplexes dienen.

Um die formelmäßige Darstellung nicht allzusehr zu komplizieren, soll auch hier nur mit solchen Verhältnissen gerechnet werden, bei denen das Temperaturfeld nur von einer Veränderlichen des Raumes abhängig ist. (Wand, Zylinder, Kugel.) Unter diesen Verhältnissen wird sich jede Anfangstemperaturverteilung an Hand der Orthogonalitätsbedingungen durch eine Reihe der Form

$$t_{(\tau=0)} = \sum_{i=0}^{i=\infty} [C_i P(m_i x)] \quad \text{. . . . . } (52)$$

darstellen lassen, so daß durch geeignete Wahl der Eigenwerte m_i für spätere Zeiten das Temperaturfeld durch den Ausdruck

$$t = \sum_{i=0}^{i=\infty} [C_i e^{-m_i^2 a \tau} P(m_i x)] \quad \text{. . . . . } (53)$$

beschrieben wird. Die Konstanten C_i folgen dann aus der im Raum von A bis B willkürlich gegebenen Anfangsfunktion $F(x)$, die allerdings den Dirichletschen Bedingungen entsprechen muß, unter Fortlassung der Zeiger i zu

$$C = \int_A^B \frac{F(x) \cdot p(x) \cdot P(m x)\, dx}{N} \quad \text{. . . . . } (54).$$

Der Nenner N ist nur abhängig von den Orthogonalitätsbedingungen und hat, wenn der Körper homogen ist, die Form

$$N = \int_A^B p(x) \cdot P^2(m x)\, dx \quad \text{. . . . . } (55),$$

andernfalls besteht er aus einer Summe von Integralen ähnlich wie in (50).

Tritt nun an einer beliebigen Stelle $x = \xi$ zur Zeit z eine Wärmequelle auf, die für den Streifen dx die plötzliche Temperaturerhöhung E zur Folge hat, so folgt für ihre Darstellung

$$dC = \frac{E}{N} \cdot p(\xi) \cdot P(m \xi)\, \partial \xi \cdot \quad \text{. . . . . } (56).$$

Das sich dem ursprünglichen überlagernde Temperaturfeld läßt sich dann durch den Ausdruck

$$\vartheta = \sum \left[\frac{E}{N_i} \cdot p(\xi)\, P(m_i \xi)\, \partial \xi \cdot e^{-m_i^2 a (\tau - z)}\, P(m_i x) \right] \quad \text{. . . . . } (57)$$

wiedergeben. Sind nun die auftretenden Wärmequellen ihrer Intensität nach gleich, so daß sie stets die gleiche Temperaturerhöhung zur Folge haben, und läßt sich ihr Auftreten durch

eine Gesetzmäßigkeit zwischen Zeit und Ort ihres Auftretens in der Form $z = F(\xi)$ in einem bestimmten Bereich $\xi = x_1$ bis $\xi = x_2$ erfassen, so erhält man den Wert der Konstanten $C_{ü}$ für das als Überlagerung auftretende Temperaturfeld zur Zeit $z = F(x_2)$ aus

$$C_{ü\,1,\,2} = \frac{E}{N_i} \int_{X_1}^{X_2} p(\xi)\, P(m_i\, \xi)\, e^{+\, m_i^2\, a\, F(\xi)}\, d(\xi) \qquad (58).$$

Beschränkt man die Betrachtung des Temperaturfeldes auf den zeitlichen Bereich des Auftretens der oben erwähnten gesetzmäßig auftretenden Wärmequellen, so erweist sich $C'_{ü_{1,\,2}}$ als Zuwachs zu den Konstanten C_i der Reihe, die das Temperaturfeld vor dem Einsetzen der Wärmeentwicklung beschrieb. Der Zeitpunkt des Einsetzens der Wärmeentwicklung fällt bei unserem Problem mit dem Augenblick τ_a zusammen, in welchem die sich aus der Anfangstemperaturverteilung entwickelnden Temperaturisochronen an irgendeiner Stelle X_0 die Erstarrungs- bzw. Umwandlungstemperatur erreichen. Schreitet man nun um eine Zeitstufe z_1 fort, während welcher das Auftreten der Wärmequellen der Gesetzmäßigkeit $z = F(\xi)$ gehorcht, so ergeben sich für die einzelnen Glieder der das Temperaturfeld beschreibenden Reihe unter Fortlassung der Zeiger i Ausdrücke der Form

$$(C + C_{ü_1})\, e^{-m^2\, a\, (\tau_a + z_1)}\, P(m\, x) \qquad (59),$$

und die Reihe erhält das Aussehen:

$$t_{\tau = (\tau_a + z_1)} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left\{ \left| C_i + \frac{E}{N_i} \int_{X_0}^{X_1} p(\xi)\, P(m_i\, \xi) \cdot e^{+\, m_i^2\, a\, F(\xi)}\, \partial\, \xi \right| e^{-m_i^2\, a\, \tau} \cdot P(m_i\, x) \right\} \qquad (60).$$

Dabei sind X_0 und X_1 die inversen Funktionen $\Phi(z)$ des Gesetzes $z = F(\xi)$ für $z = 0$ bis $z = z_1$.

Befolgt die zeitliche und räumliche Anordnung der Quellen bis zur Zeit z_n ein einheitlich gegebenes Gesetz, um dann aufzuhören, so genügt es für die Ermittlung späterer Temperaturverteilungen in (60), das Integral über den Bereich von X_0 bis X_n zu erstrecken und die Integration unmittelbar durchzuführen oder, wenn dies nicht möglich, seinen Wert graphisch oder numerisch zu ermitteln.

Bei der Verfolgung der Erstarrungs- und Umwandlungsvorgänge ist das Gesetz für das Fortschreiten der Umwandlungsgrenze nicht bekannt. Es ist außer von der Anfangstemperaturverteilung auch noch in starkem Maße von den Randbedingungen abhängig. Zu seiner Ermittlung ist die Forderung maßgebend, daß zur Zeit $\tau = \tau_a + z_n$ für $x = X_n$ stets die Umwandlungstemperatur aus Gl. (60) erfolgen muß. S. Saitô und Schmidt und Uhink[24]) haben nun zur Ermittlung dieses Gesetzes, ausgehend von einer Funktion, wie sie der erstarrungsfreie Fall liefern würde, die Methode des mehrfachen falschen Ansatzes angewendet. Als Kriterium diente der Schnittpunkt der aus 5 Gliedern berechneten Temperaturisochronen.

Betrachtet man die Schwierigkeit, daß die Arbeitsweise mit Wärmequellen eine Berücksichtigung der thermischen Verschiedenheit der beiden Phasen vor und nach der Umwandlung durch entsprechende Mittelnahme nach den weiter oben besprochenen Gesichtspunkten als behoben, so haftet dieser Methode noch die Schwäche mangelnder Konvergenz gerade für den Augenblick der Erreichung des Umwandlungspunktes zur Zeit z_n an. In der schematischen Abb. 4a treten diese Verhältnisse deutlich hervor. Entsprechend den Wärmeableitungsverhältnissen an der Umwandlungsgrenze hat die wirkliche Temperaturverteilung in deren Umgebung die Gestalt ABC. Der Bruchpunkt in B tritt um so schärfer in Erscheinung, je größer die Umwandlungswärme ist. Ist er doch der sichtbare Ausdruck für die Tatsache, daß das Temperaturgefälle BC im umgewandelten Teil außer den aus dem noch nicht umgewandelten Gebiet abströmenden Wärmemengen, deren Folge das Temperaturgefälle AB in diesem Gebiet ist, auch noch den Abfluß der Wärmemengen gestatten muß, die infolge der Umwandlungsgeschwindigkeit freiwerden. Die Reihenentwicklung liefert eine Temperaturverteilung entsprechend der Kurve ADC. Sie schmiegt sich je nach der Anzahl der verwendeten Glieder mehr oder weniger dem Linienzug ABC an. Diese Anzahl wächst mit Schärfe der Richtungsänderung in B. Die bisher veröffentlichten Berechnungsverfahren, deren Kriterium der Schnittpunkt D mit der Umwandlungstemperatur war, vernachlässigen den Betrag $DB = \Delta\xi$. Infolgedessen resultiert je nach der Größe der Umwandlungswärme und der Anzahl der verwendeten Glieder eine zu große Umwandlungsgeschwindigkeit.

[24]) H. Schmidt und W. Uhink: Mitt. K.-W.-Inst. Eisenforsch. 12 (1930), S. 323/42.

Diese Überlegung führt ganz von selbst zu einer Methode der schrittweisen Verfolgung des Vordringens der Umwandlungsgrenze unter Verwendung einfacher analytischer Näherungsgesetze, deren Abweichungen vom wirklichen Gesetz innerhalb der betrachteten Zonen verhältnismäßig klein gehalten werden können. Im allgemeinen werden sich stets die einzelnen Zonen in solche einteilen lassen, in welchen die Umwandlungsgeschwindigkeit rasch abnimmt, wie z. B. in den Randzonen gegossener Blöcke, in solche, in denen die Veränderung dieser Geschwindigkeit verhältnismäßig gering sind, und endlich in solche, in denen die Umwandlungsgeschwindigkeit rasch zunimmt, wie z. B. in der Mitte zylindrischer oder kugelförmiger Körper.

Bedeutet nun ξ die Dicke der zur Zeit z_0 erstarrten oder, was in diesem Zusammenhang gleichbedeutend ist, der umgewandelten Schale, so wird durch den allgemeinen Ansatz:

Fortschreiten der Umwandlungsgrenze

$$\xi = \pm q \cdot (z - z_0)^p \qquad (61),$$

Umwandlungsgeschwindigkeit

$$\frac{d\xi}{dz} = \pm q \cdot p \cdot z^{(p-1)} = v_e \qquad (62)$$

stets durch entsprechende Wahl von q und p eine weitgehende Näherung für alle drei Fälle gefunden werden können, unter der Voraussetzung, daß man die Ausdehnung der Zonen nicht zu groß wählt. Sind die Veränderungen der Umwandlungsgeschwindigkeit nicht sofort zu überblicken, so wird man unter entsprechender Kleinhaltung der betrachteten Abschnitte $p = 0$ setzen. Dies entspricht einem Arbeiten mit mittleren Erstarrungsgeschwindigkeiten. Für das Fortschreiten der Erstarrungsgrenze erhält man dann einen polygonalen Linienzug, dessen gradlinige Teile in etwa den Sehnen der wirklichen Kurve entsprechen. In diesem Fall wird man dann an Stellen starker Krümmung in zweiter Annäherung die Berechnung mit einem passend gewählten p wiederholen.

Für den vorliegenden Fall erstarrender Metallblöcke in verhältnismäßig kalten metallischen Gießformen weisen die Berechnungen im ersten Teil unserer Arbeit für den Verlauf der Erstarrung in der Randzone auf den Wert $p = 0{,}5$ (Wurzelgesetz) hin. Die Verwendung dieses Wertes als erste Annäherung empfiehlt sich um so mehr, als die Konvergenz der Reihen erst nach dem Verstreichen einer gewissen Zeit seit Beginn des Vorgangs ohne übermäßige Zahlenarbeit eine genügend scharfe Darstellung der Verhältnisse erlaubt. Nach den Untersuchungen von Lightfoot[2]) trifft das Wurzelgesetz bei der Erstarrung der Ränder plattenförmiger Blöcke streng zu. Die bisher durchgeführten Berechnungen an zylindrischen Körpern weisen dagegen auf $p = \frac{2}{3}$ hin.

Sobald man über das Anfangsstadium der Erstarrung hinaus ist, werden jedoch die Kurven für das Fortschreiten der Erstarrung in Abhängigkeit von der Zeit flach genug, um eine Fortführung der Berechnung mit $p = 0$ zu gestatten. Für plattenförmige Körper trifft dies bis zum Ende der Erstarrung zu. Bei prismatischen, zylindrischen und kugelförmigen Körpern dagegen nähert sich die Erstarrungsgeschwindigkeit im Kern wieder dem Wert $v_e = \infty$. Dies führt in erster Annäherung wieder zu einem parabolischen Gesetz mit $p = \frac{1}{2}$. Außerdem rechnet man in solchen Fällen stets mit einem Koordinatensystem, dessen Ursprung im Zentrum des betrachteten Körpers liegt. Die entsprechende Koordinatenverschiebung unter Berücksichtigung des Grenzwertes unendlich für die Umwandlungsgeschwindigkeit bei $r = 0$ (r = Radiusvektor) führt zu einer Näherungsform:

$$r = \sqrt{r_n^2 - q(z - z_n)} \qquad (63).$$

Die Werte r_n und z_n entsprechen zusammengehörigen Größen für Radiusvektor und Zeit zu einem Zeitpunkt, in welchem die Erstarrungsgrenze sich dem Blockzentrum bereits so weit genähert hat, daß sich die Zunahme der Erstarrungsgeschwindigkeiten stärker bemerkbar macht.

Zur Fortführung der Berechnungsmethode sei wieder auf die Verhältnisse zylindrischer Blöcke zurückgegriffen, da dies die Darstellung erleichtert und eine sinngemäße Übertragung auf andere Formen keine besonderen Schwierigkeiten machen dürfte. Man geht von der Blockoberfläche $r = d$ (Blockhalbmesser, Zylinderkoordinaten, Temperatur nur vom Radiusvektor abhängig, Ausdehnung des Zylinders in der Achsenrichtung unendlich) aus. Zum 0-Punkt der Zeitrechnung sei der Beginn der Erstarrung gewählt. Zur Darstellung des Temperaturfeldes in Block und Gießform werden die Ansätze (18) und (19) benutzt, deren Eigenwert-System etwa unter Berücksichtigung des Spaltes nach (30) bis (35) bestimmt wurde. Dann

folgen die Konstanten C_i nach (51). Auf die Beurteilung der Statthaftigkeit, den Erstarrungsbeginn mit der Ausgangstemperaturverteilung zusammenfallen zu lassen, wird später zurückgekommen werden.

Als erste Stufe faßt man eine Schale der Dicke $\xi = d - r_1$ ins Auge. Mit $p = 0{,}5$ erfordert nach (61) die Erstarrung dieser Schale die Zeit:

$$Z_1 = \left(\frac{d - r_1}{q}\right)^2 = F(\xi_1) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (64).$$

Nach (60) ergibt sich für die Temperaturverteilung zur Zeit z_1, nachdem τ_a voraussetzungsgemäß 0 ist und $X_0 = d$ bzw. $X_1 = r_1$ wird,

$$t_{z_1} = \sum_{i=0}^{i=\infty} \left\{ \left[C_i + \frac{E}{N_i} \cdot \int_d^{r_1} r \cdot J_0(m_i r) \cdot e^{m_i^2 a \left(\frac{d - r_1}{q}\right)^2} \partial r \right] e^{-m_i^2 a z_1} J_0(m_i r) \right\} \quad \ldots \quad (65)$$

mit:

$$N_i = \frac{1}{2} d^2 \left[J_0^2(m_i d) + J_1^2(m_i d)\right] + \frac{c_w \gamma_w}{c_s \gamma_s} \left\{ R^2 \left[Z_0^2(n_i R) + Z_1^2(n_i R)\right] - d^2 \left[Z_0^2(n_i d) + Z_1^2(n_i d)\right] \right\}.$$

Bei richtiger Wahl von q müssen nun nach Abb. 4a die Tangenten aus dem in Höhe der Erstarrungstemperatur liegenden Punkt r_1, der dort mit B bezeichnet wurde, einen solchen Winkel miteinander bilden, daß die Gleichung

$$\lambda_s \frac{\partial t}{\partial r_{(r = r_1 + 0)}} - \lambda_s \frac{\partial t}{\partial r_{(r = r_1 - 0)}} = v_e \cdot Q \cdot \gamma_s \quad \ldots \ldots \ldots \quad (66)$$

erfüllt wird. Um dies festzustellen, genügt es, in der Entfernung L von B, die man aus Zweckmäßigkeitsgründen entweder zu 1; 0,1 oder 0,01 m wählt, eine Senkrechte SS zu ziehen und die Tangenten AB und BC durch entsprechende Verlängerung mit ihr zum Schnittpunkt zu bringen. Solange man bei Anwendung der Quellenmethode nicht in der Lage ist, die thermische Verschiedenheit der beiden Phasen vor und nach der Umwandlung zu berücksichtigen, gibt der Abschnitt FC, im Temperaturmaßstab der Zeichnung gemessen, unmittelbar den in Celsius-Graden erfolgenden Wert

$$\overline{FC} = \frac{L}{\lambda_s} Q \cdot \gamma_s \cdot v_e = \frac{L\, Q \cdot \gamma_s}{\lambda_s} \cdot \frac{q^2}{2(d - r)} \,{}^\circ\mathrm{C} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (67).$$

Sobald eine Quellenmethode gefunden wird, die diesen Mangel vermeidet, wird man sinngemäß aus den in gleicher Weise festzustellenden Temperaturgefällen die entsprechenden Wärmemengen berechnen und sie mit der freigewordenen Umwandlungswärme vergleichen. Die Ermittlung von q erfolgt am besten graphisch durch Interpolation an Hand des Vergleichs der Soll- und Istwerte des Abschnitts FC nach Durchführung der Berechnung mit mindestens 3 Werten für q. Die Kriterien dieses Verfahrens sind, wie anläßlich der praktischen Durchrechnung verschiedener Beispiele festgestellt wurde, außerordentlich scharf, so daß die endgültige Lösung ohne weiteres im Rahmen der erforderlichen Genauigkeit liegt. Der zugehörige Wert von z_1 folgt dann wieder aus (64).

Für die nächste Stufe, die bis $r = r_2$ gehen möge, kann man bereits das lineare Gesetz nach (61) mit $p = 0$ zur Grundlage der Berechnung machen. Dann erhält man:

$$\xi = (r_1 - r) = q(z - z_1); \quad v_e = -\frac{\partial \xi}{\partial z} = q \quad \ldots \ldots \ldots \quad (68).$$

Mit

$$F(\xi_2) = z_2 = \frac{r_1 - r_2}{q} + z_1; \quad D_{i1} = \frac{E}{N_i} \int_d^{r_1} r\, J_0(m_i r)\, e^{+m_i^2 a_s \left(\frac{d - r}{q}\right)^2} \partial r \quad \ldots \ldots \quad (69)$$

erhält man dann für die Temperaturverteilung zur Zeit z_2 die Reihe

$$t_{z_2} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left\{ \left[C_i + D_{i1} + \frac{E}{N} e^{+m_i^2 a_s z_1} \int_{r_1}^{r_2} r\, J_0(m_i r)\, e^{+m_i^2 a_s \frac{r_1 - r}{q}} \partial r \right] e^{-m_i^2 a_s z_2} \cdot J_0(m_i r) \right\} \quad \ldots \quad (70).$$

Ähnlich wie bei der ersten Stufe bildet die Tangentenkonstruktion aus dem Punkte B, der nunmehr auf der Erstarrungstemperatur bei $r = r_2$ liegt, das Kriterium für die richtige Wahl von q. Da nach (68) die Erstarrungsgeschwindigkeit nunmehr $v_e = q$ wird, errechnet sich analog (67) der Wert des Abschnittes FC zu

$$\overline{FC} = \frac{L\, Q\, \gamma_s}{\lambda_s} q \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (71).$$

In sinngemäßer Weise verfährt man Abschnitt für Abschnitt. Aus (70) wird für den **n**ten Abschnitt

$$t_{z_n}=\sum_{i=1}^{i=\infty}\left\{\left[C_i+D_{i_1}+D_{i_2}\ldots+D_{i(n-1)}+\frac{E}{N_i}e^{m_i^2 a_s z_{(n-1)}}\int_{r_{(n-1)}}^{r_n} r J_0(m_i r)\, e^{m_i^2 a_s \frac{r_{n-1}-r_n}{q}}\,\partial r\right] e^{-m_i^2 a_s z_n} J_0(m_i r)\right\} \quad (72).$$

Das Auftreten eines Haltepunktes äußert sich dadurch, daß bei dem Versuch, die Tangentenkonstruktion in der bisherigen Weise durchzuführen, von dem Punkte B in Abb. 4a aus keine Tangente an den aus (70) erfolgenden Kurvenzug mehr gefunden werden kann, die dem nach (71) berechneten Zuwachs an Temperaturgefälle entspricht, ohne daß der Scheitel der nach (72) errechneten Temperaturverteilung unter die Umwandlungstemperatur sinkt. In diesem Falle zeigt sich der Vorteil der neuen Methode gegenüber der alten am deutlichsten. Während die alte Methode den Durchgang des Scheitels dieser Kurve durch die Erstarrungstemperatur als Ende der Erstarrung annahm, geht aus Abb. 4b hervor, daß dies nur bei der Verwendung außerordentlich vieler Glieder annähernd berechtigt ist. Nach Eintritt des Haltepunktes — als solcher soll in diesem Zusammenhang jedes Verweilen auf irgendeiner Umwandlungstemperatur, also auch auf der Erstarrungstemperatur, bezeichnet werden — ergibt die wirk-

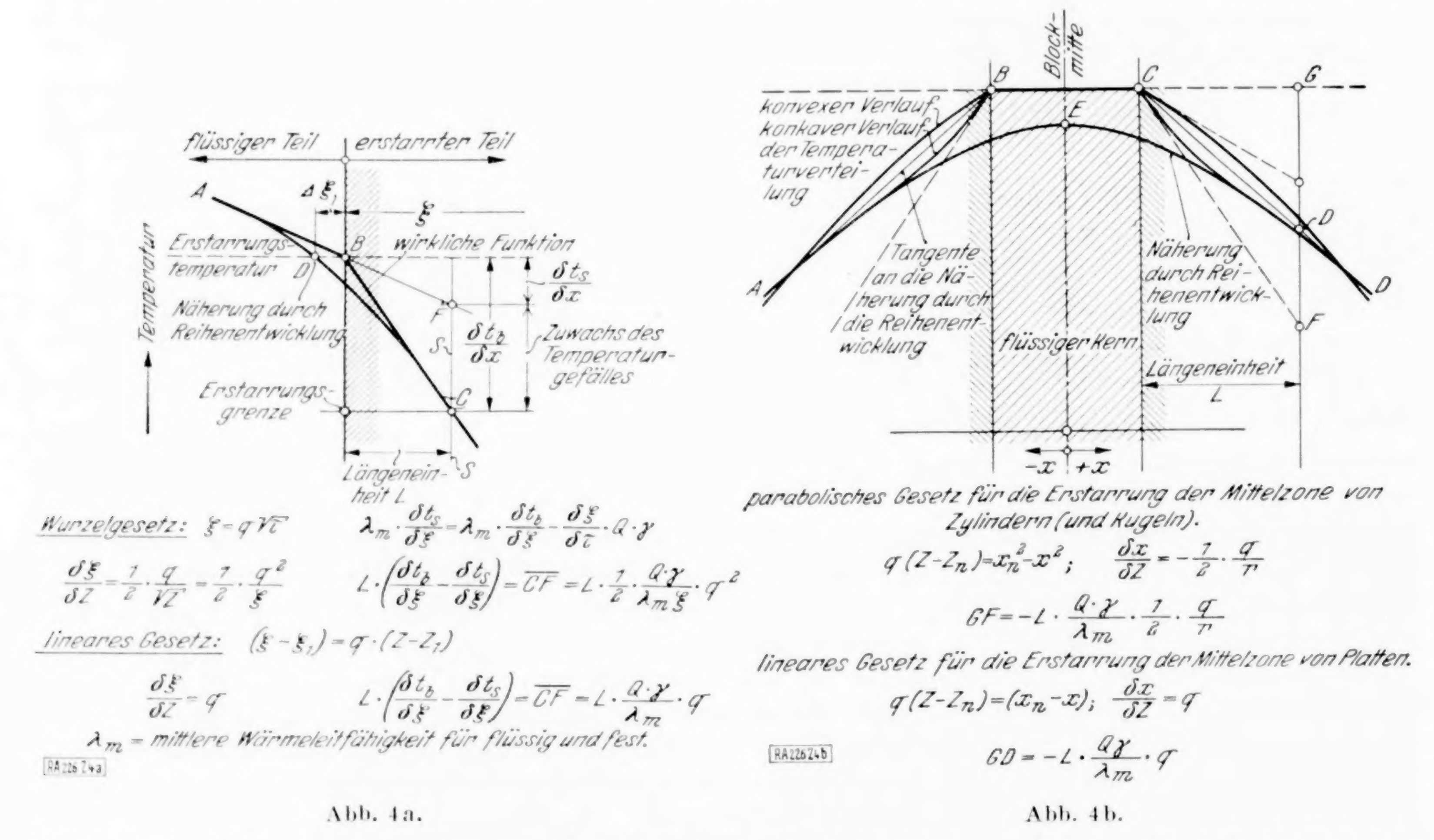


Abb. 4a. Abb. 4b.

liche Temperaturverteilung den annähernd polygonalen Kurvenzug $ABCD$. Wenn das Stück BC im Verhältnis zur Gesamtausdehnung des Temperaturfeldes klein wird, so kann man eben nur durch Anwendung einer sehr großen Anzahl von Gliedern eine entsprechende Anschmiegung der nach (72) berechneten Temperaturisochrone AED an die wirkliche Temperaturverteilung $ABCD$ erreichen. Da nach Eintritt des Haltepunktes ein Temperaturgefälle im flüssigen Teil des Blockes nicht mehr vorhanden ist, reduziert sich (66) auf

$$\lambda_s \frac{\partial t}{\partial r} = v_e\, Q\, \gamma_s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (73).$$

Als Kriterium für die richtige Wahl von q tritt der Abschnitt GD in Abb. 4b auf, den die Tangente CD auf einer in der Entfernung L von C gezeichneten Senkrechten macht. An die Stelle der zweiten Tangenten, die vorher dem Temperaturgefälle in der flüssigen Phase entsprach, ist jetzt die in Höhe der Erstarrungstemperatur liegende Horizontale BCG getreten.

Nähert man sich dem Blockzentrum noch weiter, so zeigt sich bald wieder ein Wachsen der Erstarrungsgeschwindigkeit. Außerdem wird bei zylindrischen und kugelförmigen Temperaturfeldern ein gradliniger Verlauf der Temperaturisochronen unwahrscheinlich. Er würde bedeuten, daß die abfließenden Wärmemengen proportional dem Radiusvektor r wachsen. Die Symmetrie verlangt aber, daß bei quellenfreien Temperaturfeldern im Zentrum solcher Körper das Temperaturgefälle 0 herrscht. Auch in der Umgebung des Zentrums ist dieses Temperaturgefälle noch nicht groß, da die abkühlenden Massen an dieser Stelle klein sind.

Tritt nun in diesem Gebiet eine Wärmequelle auf, so ist zu erwarten, daß die durch sie erzeugten Wärmemengen in der nächsten Umgebung des Zentrums einen Temperaturverlauf hervorrufen, der weitgehend der Gestalt stationärer Temperaturfelder ähnlich ist.

Vernachlässigt man nun in der Umgebung des Zentrums die aus der reinen Abkühlung entstehenden, im Verhältnis zur Erstarrungswärme kleinen Wärmemengen, so wird für den Augenblick die durch die Erstarrung in der nunmehr kleinen Entfernung r_n vom Zentrum freiwerdende Wärmemenge W mit Rücksicht auf die augenblickliche Erstarrungsgeschwindigkeit v_e eine zusätzliche Temperaturverteilung hervorrufen, die dem Ansatz

$$W = v_e\, Q \cdot \gamma_s\, 2\pi\, r_{(n+1)} = 2\pi\, r\, \frac{\partial t}{\partial r} \cdot \lambda_s = \text{const} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (74)$$

entspricht, wenn wir uns wieder auf zylindrische Temperaturfelder beschränken. Schon aus diesem Ansatz folgt, daß bei Wärmeableitungsverhältnissen, die den Abtransport endlicher Wärmemengen aus dem Zentrum verursachen, dort die Erstarrungsgeschwindigkeit für $r_{n+1} = 0$ den Wert $v_e = \infty$ erreichen muß. Gleichzeitig muß dann aber auch an dieser Stelle das Temperaturgefälle $\frac{d t}{\partial r}$ unendlich werden. Eine weitere Folgerung aus dieser Überlegung ist, daß man zur Ermittlung des Endes der Erstarrung den letzten Schritt von der vorletzten Schalenbegrenzung r_n nicht unmittelbar auf $r_{n+1} = 0$ machen darf, da dann in (73) der unbestimmte Wert $0 \cdot \infty$ auftritt, mit dem man bei der graphischen Auswertung nichts anfangen kann. Besser ist es, den letzten Radiusvektor sehr klein zu wählen, etwa $r_{n+1} = 0{,}01$ m, und so das Wachsen von Erstarrungsgeschwindigkeit und Temperaturgefälle ins Unendliche zu vermeiden.

Der allgemeine Ansatz für stationäre zylindrische Temperaturfelder

$$t = C \cdot \log r + D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

führt zu

$$\frac{d t}{d r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{t_{n+1} - t}{\log r_{n+1} - \log r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76).$$

Unter Benützung der Näherung (63) für das Fortschreiten der Erstarrungsgrenze im Blockzentrum erhält man für $r = r_{n+1}$

$$v_e = \frac{d r}{d z_{(r = r_{n+1})}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q}{r_{n+1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77).$$

Dann wird aus (73)

$$t = t_e - \frac{q\, Q\, \gamma_s}{\lambda_s} \cdot \log\left(\frac{r}{r_{n+1}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (78),$$

wenn man sich daran erinnert, daß in dem Augenblick, in dem die Erstarrungsgrenze den Punkt $r = r_{n+1}$ erreicht hat, dort die Erstarrungs- bzw. Umwandlungstemperatur t_e herrschen muß.

Zur Durchführung der Berechnung wird man daher am besten den Schritt von r_n nach dem in unmittelbarer Nähe der Blockachse liegenden möglichst klein zu wählenden Halbmesser r_{n+1} in der Weise vornehmen, daß man durch graphische Interpolation diejenige Erstarrungskonstante q in (63) bzw. (78) aufsucht, welche zu einer Berührung einer nach (78) berechneten Temperaturisochrone mit den aus der Reihenkurve

$$t_{z_{(n+1)}} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left\{ \left[C_i + D_{i_1} \ldots + D_{i_n} + \frac{E}{N_i}\, e^{m_i^2 a_s z_n} \int_{r_n}^{r_{(n+1)}} r\, J_0(m_i r)\, e^{+m_i^2 a \frac{r_n^2 - r^2}{q}}\, \partial r \right] e^{-m_i^2 a_s z_{n+1}}\, J_0(m_i r) \right\} \quad (79)$$

erfolgenden Temperaturverteilung führt. In (79) besteht der Unterschied gegen (72) lediglich darin, daß entsprechend (63) die Funktion $F(\xi)$ zu

$$F(\xi_{n+1}) = z = \frac{r_n^2 - r^2}{q} + z_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (80)$$

eingesetzt wurde.

Ist man mit dem zu r_{n+1} führenden Schritt nahe genug an das Zentrum herangegangen, so erhält man den Zeitpunkt z_e für das Ende der Erstarrung ohne weiteres durch Extrapolation aus (80) für $r = 0$ zu

$$z_e = \frac{r_n^2}{q} + z_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (81)$$

mit dem passenden Wert für q. Dabei wird es sich stets nur noch um Veränderungen des Wertes z_{n+1} handeln, die in der Größenordnung von Korrektionswerten liegen. Bezeichnet man nun das letzte Integralglied in (79) mit $D_{i_{n+1}}$, so erhält nun der Ausdruck (79) die Form

$$t_{z_{n+1}} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \{ [C_i + \sum_{n=1}^{n=n+1} D_{i_n}] \, e^{-m_i^2 a_s z_{(n+1)}} J_0 \, m_i \, r \} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (82).$$

Die ursprünglichen Konstanten C_i sind auf diese Weise selbst zu Funktionen der Zeit geworden. Wie Abb. 5a und 5b zeigen, die die Erstarrung eines Stahlrundblockes von 547 mm ⌀ in einer Graugußkokille von 820 mm ⌀ wiedergeben, läßt sich der Zusammenhang zwischen dem Fortschreiten der Erstarrungsgrenze und der Zeit am einfachsten graphisch darstellen. Es genügt daher, die nunmehr als Zeitfunktionen auftretenden C_i-Werte als Funktionen von z darzustellen und ihre Größe ebenfalls durch Extrapolation von z_{n+1} auf $z = z_e$ zu ermitteln. Zu diesem Zweck benutzt man aber besser das Produkt $(C_i + \Sigma D_{i_n}) \cdot e^{-m_i^2 a_s z_n}$, da vor allem die Werte höherer Ordnung exponentiell mit der Zeit wachsen und zum Schluß sehr steil verlaufen. Die Interpolation von Temperaturisochronen für Zwischenzeiten wird durch eine solche Darstellung ebenfalls bedeutend erleichtert. Zur Berechnung des weiteren Verlaufes der Temperaturverteilung nach beendeter Erstarrung kann man entweder von dem oben

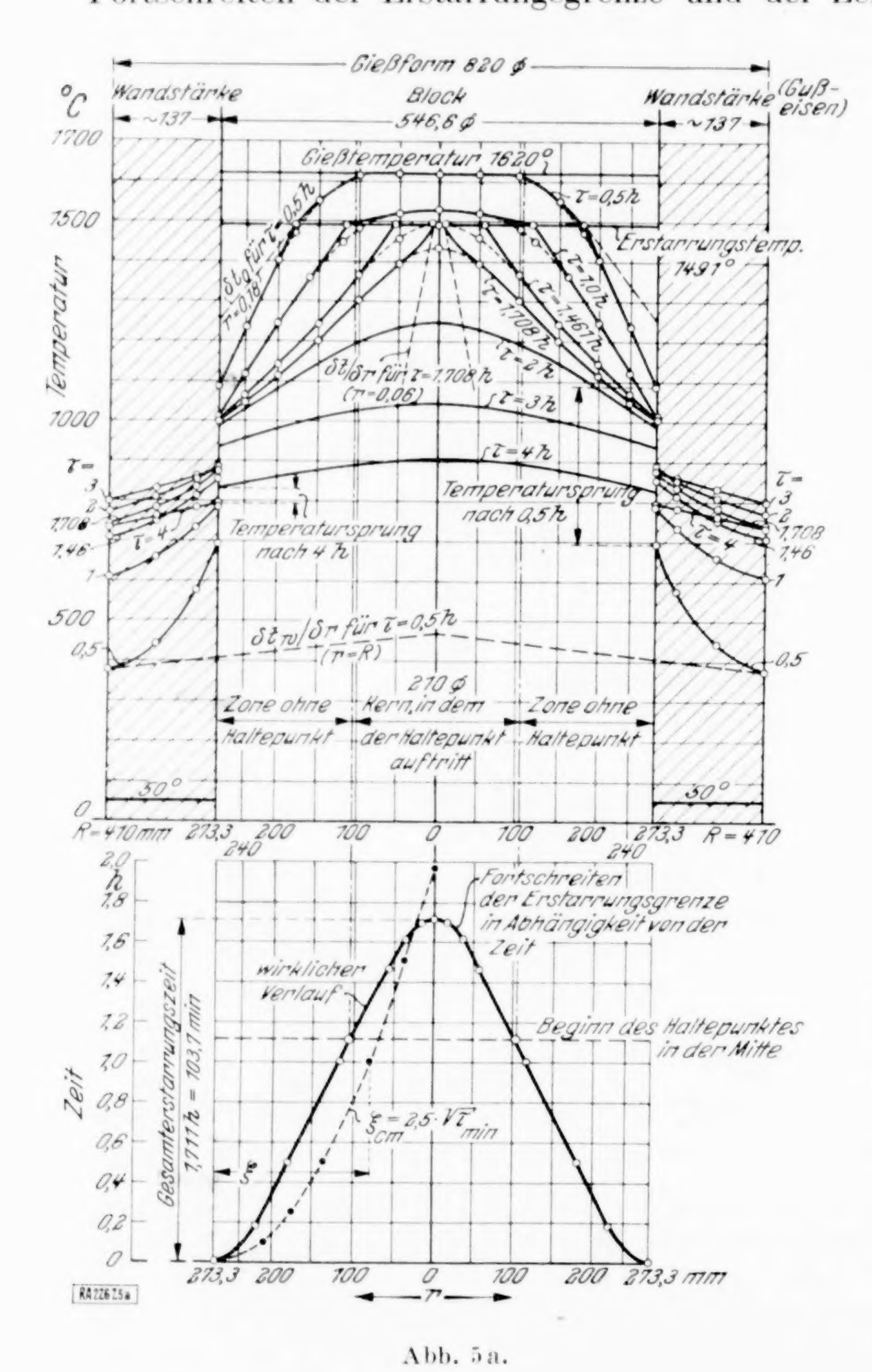


Abb. 5a.

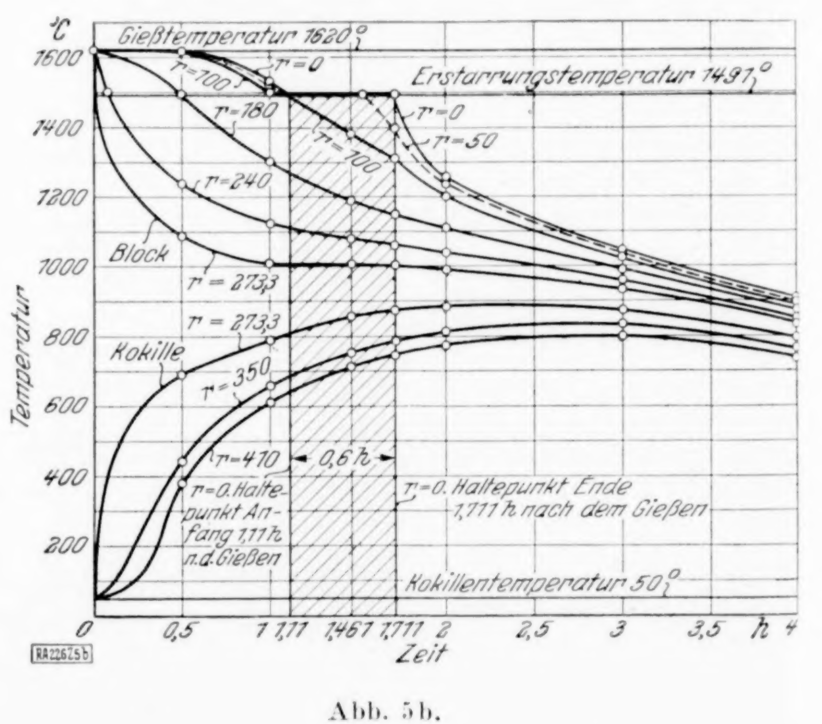


Abb. 5b.

erwähnten Produkt ausgehen und den Nullpunkt der Zeitrechnung auf die Endzeit der Erstarrung verlegen, oder, wenn man aus andern Gründen die Kontinuität der Zeitrechnung nicht unterbrechen will, aus dem graphisch ermittelten Produkt den Endwert der einzelnen Konstantensummen ermitteln und dann unter Einsatz der seit Beginn des Vorganges verstrichenen Zeit weiterrechnen, wobei sich dann selbstverständlich die Konstantensummen nicht mehr ändern.

Inwieweit diese Näherung sich der wirklichen Temperaturverteilung anschließt, kann nicht ohne weiteres angegeben werden. Ihrer Natur nach muß sie aber den wirklichen Verhältnissen unter allen Umständen näherkommen, als es die Konvergenz der entsprechenden Reihenentwicklung mit einer mäßigen Anzahl von Gliedern erlaubt.

3. Das Problem des Wärmeübergangswiderstandes beim zweifach unendlich ausgedehnten Körper. Die bisher besprochenen Entwicklungen lassen sich jedoch wegen ihrer für kurze Zeiten nach Beginn des Ausgleichvorganges recht mäßigen Konvergenz nur für größere Zeitspannen nach dem Einsetzen der Temperaturbewegung verwenden. Bei den in Abb. 8 dargestellten Verhältnissen betrug diese Zeitspanne beispielsweise 0,5 h. Bereits bei 0,25 h hätte

die Anzahl der Glieder auf mindestens 7 vermehrt werden müssen, was aber mit Rücksicht auf den Umfang der Tafeln für die Zylinderfunktionen zu der durch die drei weiteren Glieder an sich schon erforderlichen Mehrarbeit noch die Berechnungen dieser Funktionen selbst für eine ganze Reihe von Werten des Arguments über 15 hinaus erforderlich gemacht hätte. Aber gerade bei der Berücksichtigung des Spaltes sind bei gewissen Problemen die ersten Minuten nach Beginn von ausschlaggebender Bedeutung. Außerdem ist für die Berechnung selbst die Frage zu entscheiden, inwieweit man die Zeit vernachlässigen darf, die unter gegebenen Umständen verstreicht, bis die Erstarrung der Randzone einsetzt.

In sehr vielen Fällen werden sich diese Fragen an Hand der Verhältnisse bei zweifach unendlich ausgedehnten Körpern klären lassen. Hierzu ist nur erforderlich, daß die vorhandenen Wandstärken ausreichen, um ein Vordringen der Temperaturbewegung bis zu ihrer Begrenzung innerhalb der fraglichen Zeit zu verhindern. Außerdem darf die Krümmung der Berührungsfläche im Verhältnis zur Dicke der an der Temperaturbewegung beteiligten Schalen nicht wesentlich ins Gewicht fallen. Die Untersuchung der entsprechenden Fehlergrenzen würde den Rahmen dieser Arbeit übersteigen.

Nimmt man jedoch an, daß die soeben gemachten Vorbehalte eine Behandlung des Problems an Hand der Verhältnisse beim zweifach unendlich ausgedehnten Körper mit ebener Berührungsfläche zulassen, so kommt man zu denselben grundlegenden Annahmen, wie sie beim Eingangsproblem dieser Arbeit (S. 203) umrissen wurden. Nur Punkt 1 b) muß dahin geändert werden, daß an der Berührungsstelle ein Wärmeübergangswiderstand auftritt, der einen Temperatursprung verursacht. Die durch die Flächeneinheit der Berührungsfläche hindurchfließenden Wärmemengen sollen wieder proportional dem auftretenden Temperatursprung sein (s. a. Gl. (29)). Der Ursprung des Koordinatensystems liegt wieder in der Berührungsebene. Dann gilt analog (30) für die Verhältnisse bei $x=0$, wenn U die Temperaturfunktion für das flüssige Metall und V diejenige für die kalte Gießform symbolisiert, die Randbedingung

$$+\lambda_s \cdot \frac{\partial U}{\partial x_{(x=+0)}} = +\lambda_w \cdot \frac{\partial V}{\partial x_{(x=-0)}} = k \cdot (U - V) \quad \ldots \ldots \quad (83).$$

Diese führt bei Verwendung des Fehlerintegrals zu dem allgemeinen Ansatz[25])

$$\left.\begin{aligned} U &= K + A\left\{G\left(\frac{x}{2\sqrt{a_s\,\tau}}\right) + e^{h_s^2 a_s \tau + h_s x}\left[1 - G\left(\frac{x}{2\sqrt{a_s\,\tau}} + h_s\sqrt{a_s\,\tau}\right)\right]\right\} \\ V &= K + B\left\{G\left(\frac{x}{2\sqrt{a_w\,\tau}}\right) + e^{h_w^2 a_w \tau + h_w x}\left[1 - G\left(\frac{x}{2\sqrt{a_w\,\tau}} + h_w\sqrt{a_w\,\tau}\right)\right]\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (84).$$

Für $x=0$ erhält man

$$\left.\begin{aligned} U_{(x=0)} &= K + A \cdot e^{h_s^2 a_s \tau}\left[1 - G\left(h_s\sqrt{a_s\,\tau}\right)\right] \\ V_{(x=0)} &= K + B \cdot e^{h_w^2 a_w \tau}\left[1 - G\left(h_w\sqrt{a_w\,\tau}\right)\right] \\ \lambda_s \cdot \frac{\partial U}{\partial x_{(x=+0)}} &= \lambda_s\, A \cdot h_s\, e^{h_s^2 a_s \tau}\left\{1 - G\left(h_s\sqrt{a_s\,\tau}\right)\right\}; \\ \lambda_w \cdot \frac{\partial V}{\partial x_{(x=-0)}} &= -\lambda_w\, B \cdot h_w \cdot e^{h_w^2 a_w \tau}\left[1 - G\left(h_w\sqrt{a_w\,\tau}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (85).$$

Durch die Festsetzung

$$h_s^2\, a_s = h_w^2\, a_w \quad \ldots \ldots \ldots \quad (86),$$

in der h_s bzw. h_w die Eigenwerte des Problems darstellen, erhält die Exponentialfunktion und das Fehlerintegral in sämtlichen vier Gl. (85) den gleichen Wert. Zur Befriedigung der Anfangsbedingungen hat man

$$\tau = 0; \quad x > 0\; t_{s\,0} = K + A \quad \ldots \ldots \ldots \quad (87),$$

$$x < t_{w\,0} = K + B = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (88),$$

[25]) Ableitung s. Frank und Mises: Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Braunschweig, Fr. Vieweg und Sohn (1927), Bd. II, S. 235 ff.

und aus (83) wird das Gleichungspaar:

$$\lambda_s A h_s = + (-\lambda_w B h_w) \quad \ldots \ldots \quad (88)$$

$$\lambda_s A h_s = k \cdot (A - B) \quad \ldots \ldots \quad (90).$$

Durch die fünf Gl. (86) bis (90) sind die fünf zu bestimmenden Konstanten eindeutig bestimmt. Es erfolgt ganz ähnlich wie bei (15) bis (17)

$$\left.\begin{array}{ll} B = -K = -t_{s0}\dfrac{b_s}{b_s + b_w}; & A = K \cdot \dfrac{b_w}{b_s} = t_{s0}\left(1 - \dfrac{b_s}{b_s + b_w}\right) \\ h_s' = \dfrac{k}{\lambda_s'}\left(1 + \dfrac{b_s}{b_w}\right) & h_w = -\dfrac{k}{\lambda_w}\left(1 + \dfrac{b_w}{b_s}\right) \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (91).$$

Durch Einsetzen dieser Werte in (84) erhält man die gesuchten Ausdrücke. Sie erlauben bei gegebenem K mit verhältnismäßig wenig Rechenarbeit den Zeitpunkt festzustellen, zu welchem nach Beginn des Temperaturausgleiches an der Spaltstelle ($x=0$) die Erstarrungstemperatur t_e erreicht wird. Zu diesem Zweck braucht man bloß die erste Gleichung des Systems (85) für den Wert $U_{(x=0)} = t_e$ graphisch nach τ aufzulösen. Praktisch wichtig wird diese Rechnung, wenn die Gießform mit einem Anstrich versehen wurde, der ein Hintanhalten der Erstarrung für die Zeit des Gießens selbst bezweckt, um eine saubere blasenfreie Oberfläche des Gusses zu erhalten[26]).

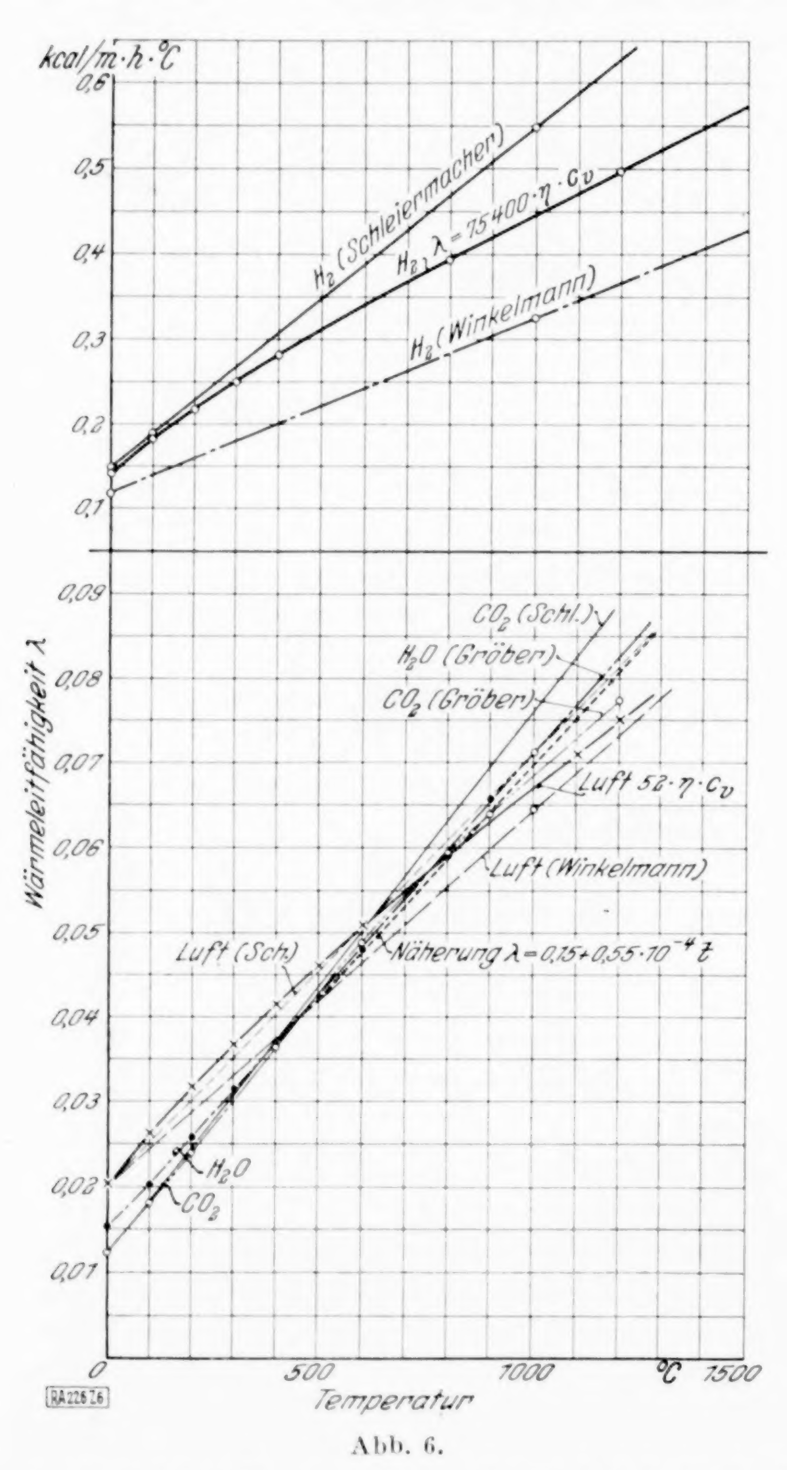


Abb. 6.

Für den Wert h bzw. $k = \infty$ gehen die Ansätze 84 von selbst in die Formeln (15) bis (17) über. Der Wert von K, der für $k = \infty$ die Berührungstemperatur bedeutet, wird für endliche Werte von k zu jener Temperatur, der sich die Spalttemperaturen im Laufe der Zeit asymptotisch nähern, solange man die Annahme der unendlichen Ausdehnung beiderseits des Spaltes aufrechterhalten kann.

Für die Wärmeübergangsverhältnisse im Spalt zwischen gegossenen Blöcken und den Wandungen der Gießformen kommen als ausschlaggebende Faktoren die Strahlungswärme, die Wärmeleitfähigkeit der den Spalt ausfüllenden Gase und fallweise die durch die Bewegung dieser Gase hervorgerufene Konvektion in Betracht. Für die Konvektion fehlen uns sämtliche Anhaltspunkte, doch kann sie bei einigermaßen dicht auf der Unterlage stehenden Kokillen mit Rücksicht auf die Bewegungswiderstände nicht sehr groß sein. Bei unten geschlossenen Kokillen dürfte sie überhaupt in Fortfall kommen. Die Wärmeleitfähigkeit der Gase ist durch eine ganze Reihe von Messungen auch im Gebiet der höheren Temperaturen zum mindesten der Größenordnung nach bekannt. Mit Rücksicht auf die Unsicherheiten bei der Behandlung der Wärmeleitfähigkeit von Gemischen genügt es aber hier für die Gase: Luft, Stickstoff, Sauerstoff, Kohlenoxyd, Kohlensäure und Wasserdampf die gemeinsame Näherungsformel

$$\lambda_{\text{Gas}} = 0{,}015 + 0{,}55 \cdot 10^{-4} \cdot t \,\text{kcal} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{Grad}^{-1} h^{-1} \quad \ldots \ldots \quad (92)$$

zu benutzen, deren Abweichung von einer ganzen Reihe gemessener Werte aus Abb. 6 hervorgeht. Für Wasserstoff würde etwa der 7fache Wert in Frage kommen. t ist in diesem Fall in °C einzusetzen.

[26]) Weitere Ausführungen in dieser Richtung vom praktischen Standpunkt aus s. Die rechnerische Behandlung der Abkühlungs- und Erstarrungsvorgänge bei flüssigem Metall. II. Teil Arch. Eisenhüttenw. 5. (1930/31), S. 177/91.

Für die Berücksichtigung der Strahlung kann das Strahlungsgesetz ebenfalls etwas vereinfacht werden. Setzt man nämlich für den Temperatursprung die mittlere Temperatur $T_m = \frac{T_1 + T_2}{2}$ ein und bezeichnet man mit $\Delta = \frac{T_1 - T_2}{2}$ den halben Betrag des Temperatursprunges selbst, so ergibt sich mit der Strahlungskonstanten C, die für Eisen mit etwa 4,76 eingesetzt werden kann — für andere Metalle sind selbstverständlich die entsprechenden Werte zu nehmen —, unter Einsatz absoluter Temperaturen

$$\left.\begin{aligned} Q_{\text{Strahlung}} &= 4{,}76 \cdot 100^{-4} \cdot (T_1^4 - T_2^4) = 4{,}76 \cdot 100^{-4} \left[(T_m + \Delta)^4 - (T_m - \Delta)^4\right] \\ &\sim 38 \cdot T_m \cdot \Delta \cdot (T_m^2 + \Delta^2) \cdot 100^{-4} = 38\, T_m^3 \Delta \left(1 + \frac{\Delta^2}{T_m^2}\right) \cdot 100^{-4} \end{aligned}\right\} \quad (93).$$

Wird Δ im Verhältnis zur Mitteltemperatur klein, so kann man ohne allzu großen Fehler sein Quadrat in der Klammer von (93) vernachlässigen. Die Größe des dadurch verursachten Fehlers beträgt $100 \cdot \left(\frac{\Delta}{T_m}\right)^2$ % der übertragenen Wärmemenge. Unter Berücksichtigung, daß diese zu $Q_{\text{Strahlung}} = k \cdot 2\Delta$ gesetzt werden kann, ergibt sich für den Anteil der Strahlung an der Wärmeübertragungszahl

$$k_{\text{Strahlung}} = 0{,}19 \cdot \left[\frac{T_m}{100}\right]^3 \quad (94).$$

Bei der Berücksichtigung der Wärmeleitung durch die Gase spielt die räumliche Ausdehnung des Spaltes s eine ziemlich große Rolle, da die entsprechende Wärmemenge $Q_{\text{Leitung}} = \frac{\lambda}{s}(t_1 - t_2)$ ist. Dementsprechend reduziert sich der Anteil der Wärmeübertragungszahl durch Leitung auf $k_{\text{Leitung}} = \frac{\lambda}{s}$. Daraus folgt unter Vernachlässigung der Konvektion für die Wärmeübertragungszahl im Spalt:

$$k = k_{\text{Strahlung}} + k_{\text{Leitung}} = 0{,}19 \left[\frac{T_m}{100}\right]^3 + \frac{1}{s}\left(0{,}015 + 0{,}0055 \frac{t_m}{100}\right) \quad (95),$$

worin für T_m die mittlere absolute Temperatur, für t_m die mittlere Temperatur in °C einzusetzen ist.

Für die Berechnungen kann in erster Annäherung als mittlere Spalttemperatur diejenige Temperatur eingesetzt werden, die sich bei vollkommener Berührung an der Berührungsfläche ergeben würde. Die einzusetzende Spaltstärke muß den Verhältnissen entsprechend gewählt werden. Stark schrumpfende Metalle und große Blockdimensionen werden größere Spaltwerte ergeben, als kleine Blöcke bei schwach schrumpfenden Metallen. Bei dem in Abb. 5a und b dargestellten Temperaturfeld eines Stahl-Rundblockes in gußeiserner Kokille wurde eine mittlere Spaltstärke von 2 mm und eine mittlere Spalttemperatur von etwa 800° zugrunde gelegt, so daß sich eine Wärmeübergangszahl von $k = 260$ kcal $h^{-1}\, m^{-2}$ Grad^{-1} nach Formel (95) errechnete. (Messungen schwanken zwischen 300 und 500 kcal $h^{-1}\, m^{-2}$ Grad^{-1}, sind aber wahrscheinlich etwas hoch.)

Zusammenfassung. Damit sind die Grundlagen für die rechnerische Verfolgung einer großen Anzahl praktisch vorkommender Fälle beim Vergießen von Metallen gegeben. Für das Verhalten in Gießpfannen dürfte im allgemeinen mit den Formeln für den erstarrungsfreien Fall auszukommen sein, während die Erstarrung der Blöcke in Kokillen nunmehr durch die Berücksichtigung des Spaltes und der Verschiedenheit des Metalls von der Gießform in einer den praktischen Verhältnissen weitgehend Rechnung tragenden Weise durchgerechnet werden kann. Die mathematische Behandlung der Probleme mag noch weitgehender Vereinfachung oder Erweiterung fähig sein. Die vorliegende Form diente lediglich zur Klärung gewisser Fragen des praktischen Stahlwerkbetriebes, in dem der Verfasser tätig ist. Der Zweck der Arbeit ist vollständig erfüllt, wenn sie dazu führt, daß fachkundige Mathematiker die angeschnittenen Fragen weiterverfolgen, um vor allem auch der Metallographie Handhaben zu bieten, die es gestatten, zahlenmäßig Licht in eine ganze Reihe von Vorgängen zu bringen, zu deren Erklärung man heute noch auf den Weg der reinen Erwägung angewiesen ist.

226

Zur Frage der Abrundung und Zuschärfung umströmter Kanten.

Von *Fritz Weinig* in Berlin.

(Aus dem Institut für technische Strömungsforschung, Technische Hochschule Berlin.)

1. Die Eigenschaften des einfachen Quellkörpers. Als Beispiel für die Abrundung der Vorderkante eines umströmten Körpers bringen wohl alle Lehrbücher und viele Abhandlungen der modernen Strömungslehre eine Form, welche durch Überlagerung einer homogenen Parallelströmung und einer Quelle entstanden gedacht werden kann. Diese Form — es soll sich hier um das ebene Problem handeln — ist zwar einfach zu konstruieren. Doch hat sie praktisch nur diesen Vorteil, höchstens noch den didaktischen, dem Verständnis von Strömungsvorgängen besonders leicht zugänglich zu sein. Ihrer Verwendung in der Technik stehen verschiedene Mängel im Wege. Bis ins Unendliche ist nämlich die Begrenzung nicht genau parallel, so daß sie sich nur schwer verwirklichen ließe. Weiter bedingt diese Quellkörperform einen immerhin erheblichen Unterdruck. Ihre Verwendung als Form für eine Abflußkante ist gänzlich undenkbar, da dann noch ein weiterer Mangel hinzukommt. Dann ist nämlich die nötige Verzögerung auf die kurze Strecke zwischen der Stelle der Höchstgeschwindigkeit und dem Zusammenflußpunkt verteilt, was in der wirklichen Strömung erhebliche Wirbelverluste bedingt.

Ich will deshalb im folgenden einige Wege zeigen, wie durch andere Formgebung diese Mängel behoben werden können, ohne daß deswegen diese Formen eine umständliche Berechnung verlangten. Sie sind nämlich nicht viel schwieriger zu konstruieren als der Quellkörper. Dennoch will ich zuerst die wesentlichsten Eigenschaften des einfachen Quellkörpers darlegen, weil hierdurch das Verständnis der späteren Ausführungen wesentlich gefördert wird.

Um diesen Quellkörper zu erzeugen, haben wir eine Parallelströmung und eine Quelle zu überlagern. Die aus beiden Strömungsanteilen herrührenden Flüssigkeitsmengen mischen sich dabei nicht. Die Trennfläche dieser Anteile ist der gesuchte Halbkörper; wir können ja jede aus den Stromlinien gebildete Fläche in einer idealen Flüssigkeit durch eine feste Körperfläche ersetzt denken.

Die Parallelströmung erfolge in der Richtung der negativen X-Achse und habe die Geschwindigkeit $u = -1$. Das komplexe Potential dieser Strömung ist dann

$$\chi_1 = \varphi_1 + i\,\psi_1 = z = x + i\,y\,.$$

Die Quelle liege in $(x=0,\ y=0)$ und habe die Ergiebigkeit $\mu = 2\pi$. Ihre Strömung wird dann wiedergegeben durch

$$\chi_2 = \varphi_2 + i\,\psi_2 = -\ln z = -\ln r - i\,\vartheta\,.$$

Hierbei ist

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad \vartheta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\,.$$

Die Überlagerung dieser beiden Strömungen ergibt

$$\chi_1 + \chi_2 = \chi = \varphi + i\,\psi = z - \ln z\,.$$

Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil liefert das Potential φ und die Stromfunktion ψ

$$\varphi = x - \ln r\,, \qquad \psi = y - \vartheta\,,$$

oder unter Verwendung von Polarkoordinaten

$$\varphi = r\cos\vartheta - \ln r\,, \qquad \psi = r\sin\vartheta - \vartheta\,.$$

Die Geschwindigkeit in dieser Strömung findet man aus

$$-\overline{w} = \frac{d\chi}{dz} = 1 - \frac{1}{z}\,.$$

Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil ergibt die Geschwindigkeitskomponenten

$$-\overline{w} = -u + i\,v = \frac{x^2 + y^2 - x}{x^2 + y^2} + i\,\frac{y}{x^2 + y^2}\,.$$

Somit ist

$$u = -\left(1 - \frac{1}{r}\cos\vartheta\right), \qquad v = \frac{\sin\vartheta}{r}\,.$$

Aus der Form von $-\overline{w}=\frac{d\chi}{dz}$ ersieht man, daß auch $\overline{w}$ eine analytische Funktion ist. Die Linien $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ haben bei dem einfachen Quellkörper die gleichen Eigenschaften wie Potential- und Stromlinien einer Doppelquelle (Abb. 1).

Den Absolutwert der Geschwindigkeit findet man aus

$$w^2=u^2+v^2=\frac{1}{r}-\frac{2\cos\vartheta}{r}+1\,.$$

Die Stromlinie, welche die aus der Parallelströmung herrührende Menge von der aus der Quelle herrührenden trennt, ist der Halbkörper, der als Beispiel für die Abrundung einer Eintrittskante dient. Hierfür ist

$$\psi=0=r\cdot\sin\vartheta-\vartheta\,.$$

Statt ihn graphisch durch Überlagerung der Strömungsbilder der Parallelströmung und der Quelle zu konstruieren, wäre er also auch direkt zu finden aus

$$r=\frac{\vartheta}{\sin\vartheta}\,.$$

Auf der Kontur des Quellkörpers ist (Abb. 3)

$$u\,(\mathrm{k})=-\left(1-\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\vartheta}\right)=-\left(1-\frac{\sin 2\vartheta}{2\vartheta}\right),\qquad v\,(k)=\frac{\sin^2\vartheta}{\vartheta}\,.$$

Somit ist

$$w^2\,(k)=\frac{\sin^2\vartheta}{\vartheta^2}-\frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\vartheta}+1\,.$$

Das Maximum der Geschwindigkeit findet man aus

$$\frac{d\,w^2}{d\,k}=0\,.$$

Diese Gleichung ist nur durch Probieren zu lösen. Man findet

$$w_{\max}\sim 1{,}259_3\cdot u_\infty\qquad\text{bei}\qquad \vartheta\sim 117^\circ\,.$$

Der Verzweigungspunkt der Strömung liegt in

$$\vartheta_0=0\qquad r_0=\frac{\vartheta_0}{\sin\vartheta_0}=1\,.$$

Ein gewisses Interesse verdient auch der Krümmungsradius ϱ der Kontur in diesem Punkt. Es ist

$$\varrho=\frac{(r^2+r'^2)^{3/2}}{r^2+2r'^2-rr''}\,.$$

Wir setzen

$$r=\frac{\vartheta}{\sin\vartheta}=\frac{1}{f(\vartheta)},\qquad f(\vartheta)=\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}=1-\frac{\vartheta^2}{3!}+\frac{\vartheta^3}{5!}\;\ldots\ldots\;\lim_{\vartheta\to 0}f(\vartheta)=1\,,$$

somit

$$r'=-f'(\vartheta)\cdot\frac{1}{f^2(\vartheta)},\qquad f'(\vartheta)=-2\frac{\vartheta}{3!}+4\frac{\vartheta^3}{5!}\;\ldots\;\lim_{\vartheta\to 0}f'(\vartheta)=0\,,$$

$$r''=-f''(\vartheta)\cdot\frac{1}{f^2(\vartheta)}+2f'^2(\vartheta)\frac{1}{f^3(\vartheta)},\qquad f''(\vartheta)=-\frac{2}{3!}+\frac{4\cdot 3}{5!}\vartheta^2\;\ldots\;\lim_{\vartheta\to 0}f''(\vartheta)=-\frac{1}{3}\,.$$

Für $\begin{matrix}\vartheta\to 0\\ r\to 1\end{matrix}$ wird somit $\lim r'=0$; $\lim r''=+\frac{1}{3}$ und wir erhalten

$$\varrho_0=\frac{3}{2}r_0\,.$$

Der Quellkörper besitzt im ∞ eine Asymptote. Für $r\to\infty$ wird $r\sin\vartheta=y=\pi\cdot r_0$. Die Breite des Quellkörpers im ∞ ist also $2\pi r_0$. Für anderes u_∞ und μ wird allgemein

$$r_0=\frac{\mu}{2\pi u_\infty}\,.$$

Es waren vorhin die Linien gleicher Geschwindigkeitskomponenten u und v abgeleitet worden. Diese waren die gleichen harmonischen Kreisbüschel wie die Potential- und Stromlinien einer Doppelquelle. Interessanter sind die Linien konstanten Druckes bzw. gleicher Geschwindigkeit. Es ist nicht nur $\frac{d\chi}{dz} = -\overline{w}$ eine analytische Funktion, wenn χ eine solche ist, sondern auch

$$\ln \frac{d\chi}{dz} = \ln - \overline{w}\,.$$

Die Zerlegung dieses Ausdruckes in Real- und Imaginärteil liefert

$$\ln - \overline{w} = \ln |w| + i(\pi - \nu)\,.$$

Hierbei ist $|w|$ der Absolutwert der Geschwindigkeit, ν der Winkel, den diese mit der x-Achse einschließt. Isotachen ($|w| = \text{const}$) und Isoklinen ($\nu = \text{const}$) einer Strömung haben also ebenfalls die gleichen Eigenschaften wie Potential- und Stromlinien. Für den Quellkörper finden wir

$$-\overline{w} = \frac{d\chi}{dz} = 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z}\,, \qquad \ln - \overline{w} = \ln(z-1) - \ln z\,.$$

Isotachen und Isoklinen sind somit gegeben durch das Bild der Strömung einer Quelle in $z = 0$ und einer Senke in $z = +1$ von der Ergiebigkeit $\mu = 2\pi$. Die Isoklinen sind die Kreisschar durch die Punkte $z = 0$ und $z = +1$, die Isotachen sind die dazu orthogonalen Kreise (Abb. 2).

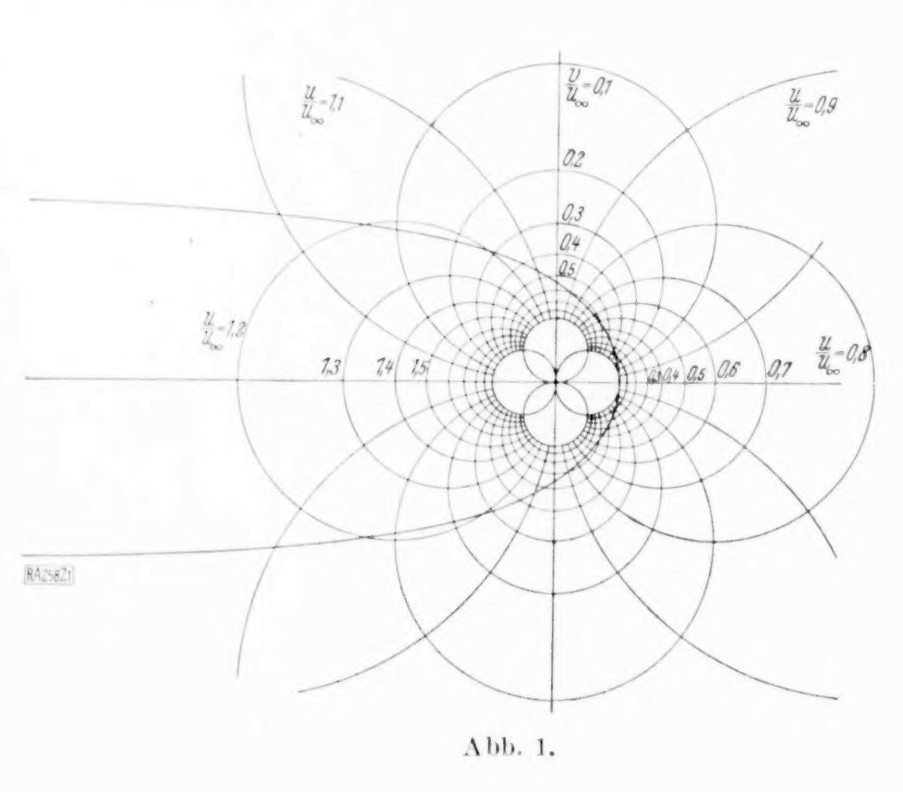


Abb. 1.

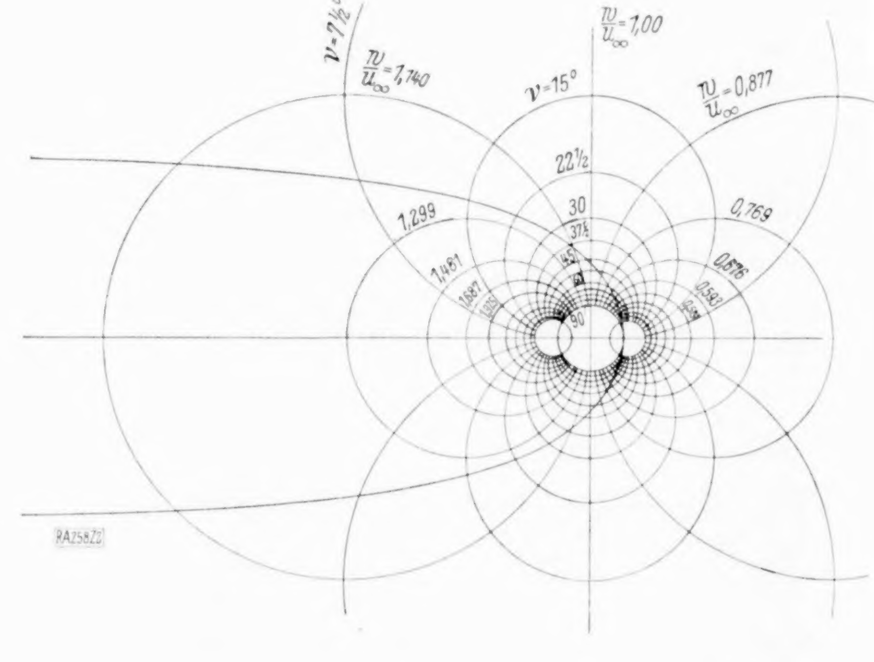
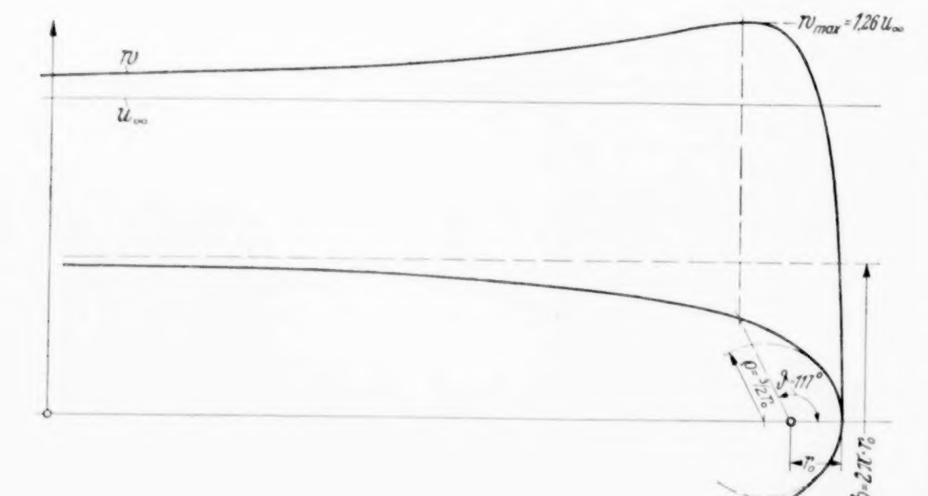


Abb. 2.


Abb. 3.

Auf der Geraden $x = \frac{1}{2}$ ist überall die gleiche absolute Geschwindigkeit wie im ∞. Davor $\left(x > \frac{1}{2}\right)$ ist überall kleinere Geschwindigkeit, also Überdruck vorhanden, dahinter $\left(x < \frac{1}{2}\right)$ überall größere Geschwindigkeit und somit Unterdruck.

Man kann auch den Ort der Geschwindigkeitsminima und der Geschwindigkeitsmaxima, die im Verlauf der einzelnen Stromlinien auftreten, ermitteln. Hierbei kann man eine ganz ähnliche Methode benutzen, wie sie zur Erreichung der Isotachen und Isoklinen verwandt wurde, doch führt das hier zu weit. Diese Linien begrenzen dann die Gebiete der Verzögerung und der Beschleunigung der Strömung

Hiermit sind die hauptsächlichsten Eigenschaften des Quellkörpers und der Strömung um ihn dargelegt. Über die unsymmetrische Anströmung soll am Schlusse noch einiges gegesagt werden.

2. Die Methoden zur Ermittlung und Untersuchung von Abrundungen und Zuschärfungen im allgemeinen. Austrittskanten werden im allgemeinen zugeschärft. In vielen Fällen geschieht das auch mit Eintrittskanten. Deshalb ist man genötigt, auch für ihre Strömungsberechnung Methoden zu entwickeln.

Bisher suchte man dies meist durch punktweise oder stetige Belegung der Mittellinie durch Quellen und unter Umständen Senken zu erreichen nach einer von Rankine[1]) eingeführten und insbesondere von Taylor[2]), Föttinger[3]) und Pötter[4]) weiter ausgebildeten Methode. Hierdurch fand man dann zu gegebenen Belegungen Formen, unter denen man dann je nach ihrer Eignung die zweckmäßigste aussuchen konnte.

Methoden, zu gegebenen Zuschärfungen die entsprechenden Belegungen zu finden, wurden erst in den letzten Jahren, insbesondere auch von mir selbst entwickelt, und zwar auf der Grundlage der graphischen Lösung der dabei auftretenden linearen Integralgleichungen I. Art. Zu diesen Methoden kamen aber auch die Oberflächenbelegungen, die auf Integralgleichungen II. Art führten, deren Lösung im Prinzip die gleiche war[5]).

An die Entwicklung solcher Methoden schloß sich nun in neuester Zeit die Lösung der Aufgabe, zweckmäßige Formen zwangläufig nach physikalischen Gesichtspunkten zu konstruieren. Ich entwickelte hierzu zunächst eine Hodographenmethode[6]). Auch diese führte auf Integralgleichungen II. Art, zu deren Lösung jedoch schon vorher brauchbare Wege gefunden waren.

Aussichtsreicher als diese Methode scheint jedoch eine auf den Eigenschaften des Isoklinen-Isotachenfeldes aufbauende zu sein. Tatsächlich wurden mit ihr schon sehr schöne und über das vorliegende Thema weit hinausgehende Erfolge erzielt, insbesondere, da bei ihrer Verwendung bei der Aufgabe, zu einer vorgegebenen Geschwindigkeitsverteilung auf der Oberfläche den entsprechenden Körper zu finden, keine Integralgleichungen auftreten.

Umgekehrt wurde von ihr ausgehend sogar wieder eine Methode entwickelt gegebene Formen zu untersuchen, und zwar durch direkte Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung auf den gegebenen Konturen ohne Umweg über Quellbelegungen. Hierbei war der Erfolg hinsichtlich des Zeitaufwandes und der erreichten Genauigkeit sehr befriedigend.

Mit der Methode der Belegungen will ich mich hier nicht beschäftigen. Diese sind in anderen Arbeiten schon weitgehend dargelegt. Ich will hier die Isotachen-Isoklinen-Methode benutzen.

Für ihre Anwendung ist die konforme Abbildung der gesuchten Strömung auf eine bekannte unerläßlich. Bei der Strömung um Halbkörper kommen hierfür im wesentlichen folgende Abbildungen in Betracht:

1. Abbildung des gesuchten Halbkörpers auf eine Halbgerade.
2. Abbildung des gesuchten Halbkörpers auf einen einfachen Quellkörper.
3. Abbildung des gesuchten Halbkörpers in seinem vordersten Teil auf einen Kreis und die Fortsetzung auf die Verlängerung der Achse hinter dem Kreis.

Die erstere dieser Abbildungen ist zweckmäßig zu verwenden: Zur Entwickung von Halbkörpern, die einen längs der zunächst unbekannten Kontur vorgeschriebenen Geschwindigkeitsverlauf haben, oder zur Nachrechnung der Geschwindigkeitsverteilung um vorgegebene Konturen, aber nur dann, wenn diese Formen Asymptoten haben. Ich will auf diese Abbildungsmöglichkeit im folgenden zunächst nicht weiter eingehen, da bei Durchführung dieser Aufgaben Linienintegrale auszuwerten wären, deren Darstellung hier zu weit führen würde. Erst zum Schluß, bei der Untersuchung unsymmetrischer Anströmung, will ich diese Abbildung benutzen.

[1]) Rankine: On Plane Waterlines, Phil. Trans. 1863 u. 1871 und Proc. Roy Soc., Vol. 13; Elementary Demonstrations of principels relating to Stream Lines, Eng. 16. 10. 1868; On the mathematical Theory of Stream Lines, Phil. Trans. 1871; vgl. auch Anm. 3.

[2]) Taylor: On ship shaped Forms, Nav. arch. 1894. Vgl. auch Anm. 3.

[3]) Föttinger: Über Maschinen zur Integration von Wirbel- und Quellfunktionen (Vektorintegratoren). Proc. 1. Int. Congr. Appl. Mech., Delft 1924, vgl. auch Anm. 1. — Die Entwicklung der Vektorintegratoren. Z. f. t. Ph. 1928, Heft 1. — Fortschritte der Strömungslehre im Maschinenbau und Schiffbau, Jahrb. d. S. B. T. G. 1924.

[4]) Pötter: Über den Einfluß der Ausbildung des Kopfes von Schaufelprofilen bei Kreiselrädern auf die Kavitaton, Z. f. a. M. u. M. 1929, S. 85 ff., und Wasserkraft 1929, S. 93 ff.

[5]) Weinig: Über schnell konvergierende graphische Lösungen von Strömungsproblemen, Z. f. t. Ph. 1928. Heft 1.

[6]) Weinig: Über Widerstands- und Tragflügelprofile mit vorgeschriebener Geschwindigkeitsverteilung an der Oberfläche, Z. f. a. M. u. M. 1929, Heft 6. Widerstands- und Tragflächenprofile mit strömungstechnisch günstiger Druckverteilung an der Oberfläche, Zeitschr. f. techn. Physik 1930, Heft 12; Der Hodograph der Gitterströmung als Weg zur Ermittlung günstiger Turbinen- und Propellerprofile. Vortr. a. d. 3. int. Kongr. f. Mechanik, Stockholm 1930.

3. Entwicklung einer Zuschärfung aus dem einfachen Quellkörper. Die Abbildung auf den Quellkörper ist im allgemeinen nicht zweckmäßig. Dennoch gibt es eine hübsche Anwendung. Man kann nämlich hierdurch zum Quellkörper analoge bekommen, die wie er Asymptoten besitzen, aber vorne zugeschärft sind. Ihre Darstellung sei deshalb hier beschrieben.

Die Strömungsebene des einfachen Quellkörpers sei $\varkappa = \xi + i\eta$; die Strömung somit

$$\chi = \varkappa - \ln \varkappa; \quad d\chi = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} d\varkappa \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Das Bild des Isotachen-Isoklinenfeldes der in der z-Ebene gesuchten Strömung in der $\varkappa$-Ebene sei gegeben durch

$$\ln - \overline{w}(z) = \ln \left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\right)^{\frac{\delta}{\pi}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Eine verhältnismäßig einfache Verallgemeinerung ließe sich erhalten, wenn man

$$\ln - \overline{w}(z) = \ln \left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa - a}\right)^{\frac{\delta}{\pi}}$$

setzen würde. Hier wird jedoch nur der Fall $a = 0$ behandelt. Hierbei soll δ der Kantenwinkel des gesuchten Halbkörpers in der z-Ebene sein. (Der Kantenwinkel des gegebenen Quellkörpers ist π.)

Aus

$$-\overline{w}(z) = \frac{d\chi}{dz}$$

folgt nun

$$z = \int \frac{d\chi}{-\overline{w}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3).$$

Aus (1) (2) (3) muß sich nun prinzipiell, durch Elimination von $\varkappa$ und $\overline{w}$, $z(\chi)$ bzw. $\chi(z)$ finden lassen. Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil liefert dann die Potential- und Stromlinien, insbesondere für $\psi = 0$ die gesuchte Zuschärfung. Leider gelingt die explizite Durchführung nicht. Man muß deshalb die Aufgabe graphisch lösen, was, soweit es sich um die Bestimmung der Zuschärfung und der Geschwindigkeitsverteilung auf ihr handelt, sehr einfach ist. Als Beispiel sei $\delta = \frac{\pi}{4}$ durchgeführt.

Über der Länge ξ als Abszisse sei für den gegebenen Quellkörper das Potential φ, der Logarithmus der Geschwindigkeit $\ln w_q$ und der arcus des Neigungswinkels ν_q aufgetragen. Änderung des Maßstabes ergibt

$$\ln w = \frac{\delta}{\pi} \ln w_q \quad \text{und} \quad \nu = \frac{\delta}{\pi} \cdot \nu_q,$$

d. h. Real- und Imaginärteil von

$$\ln - \overline{w} = \ln \left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\right)^{\frac{\delta}{\pi}},$$

wobei man zweckmäßig auf φ als unabhängige Variable übergeht.

Es war allgemein

$$z = \int \frac{d\chi}{-\overline{w}}.$$

Für die Körperoberfläche findet man durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$x(\varphi) = \int_{+1}^{\varphi} \frac{\cos \nu}{w} d - \varphi, \qquad y(\varphi) = \int_{+1}^{\varphi} \frac{\sin \nu}{w} d - \varphi.$$

Es ist nämlich

$$w = -\frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{d\varphi(s)}{dx} \cdot \cos \nu = -\frac{d\varphi}{dy} \sin \nu,$$

woraus dann diese Integrale für x und y folgen.

Nun wird $\sin\nu(\varphi)$, $\cos\nu(\varphi)$, $w(\varphi)$, $\frac{\sin\nu}{w}(\varphi)$, $\frac{\cos\nu}{w}(\varphi)$ in Abhängigkeit von φ aufgetragen. Durch Integration findet man dann

$$x(\varphi) = \int_{+2}^{\varphi} \frac{\cos\nu}{w}\, d - \varphi,$$

$$y(\varphi) = \int_{+2}^{\varphi} \frac{\sin\nu}{w}\, d - \varphi.$$

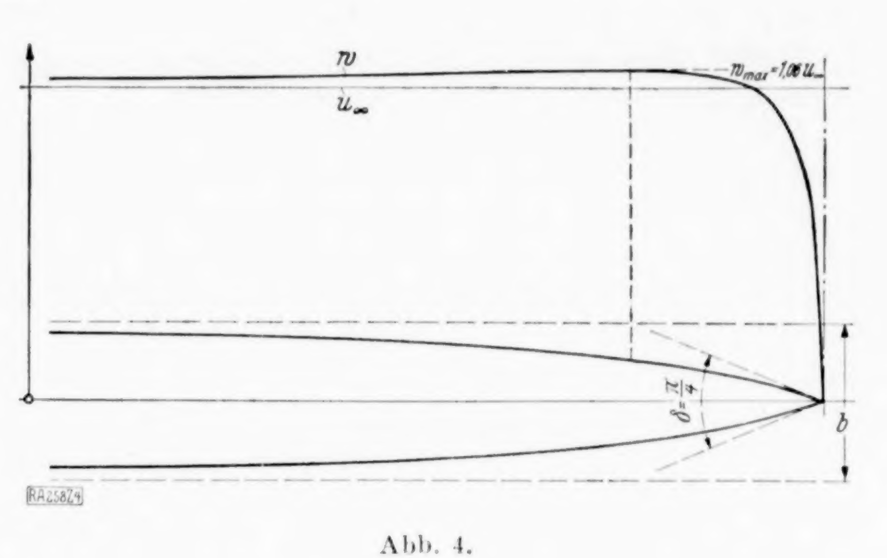


Abb. 4.

Hiermit ist aber die gesuchte Zuschärfung $y(x)$ und die Geschwindigkeitsverteilung auf ihr schon gefunden (Abb. 4).

Die maximale Geschwindigkeit ist die $\frac{\delta}{\pi}$ te Wurzel aus der maximalen Geschwindigkeit am Quellkörper, die $\sim 1{,}26$ ist, also für $\delta = \frac{\pi}{4}$ z. B. $w_{\max}$ 1,06.

4. Ermittlung von endlich langen Abrundungen. Die dritte Abbildungsmöglichkeit des gesuchten Halbkörpers, nämlich die auf einen Kreis und dessen Zusammenflußlinie kommt hauptsächlich für die wichtigste Art der Abrundungen und Zuschärfungen in Betracht, wo die Fortsetzung der Zuschärfung bzw. Abrundung in Parallelen besteht. Die Abrundung bzw. Zuschärfung wird auf den Kreis und die parallele Fortsetzung auf die Zusammenflußlinie der Kreisumströmung abgebildet.

Um es nochmals kurz anzudeuten. Die Methode der Ermittlung der gesuchten Kontur in der z-Ebene besteht darin, daß wir uns diese Kontur in eine neue, von der die Strömung bekannt ist, in der $\varkappa$-Ebene gelegene abgebildet denken. Bei dieser Abbildung wird auch das Isotachen-Isoklinenfeld in der z-Ebene in die $\varkappa$-Ebene abgebildet. Dieses Bild des Isotachen-Isoklinenfeldes in der $\varkappa$-Ebene ist dort natürlich nicht mehr Isotachen-Isoklinenfeld der Bildströmung, da jetzt hierfür die Randbedingungen geändert erscheinen. Die Eigenschaft $\Delta \ln|w| = 0$ bleibt jedoch erhalten. Wir geben uns nun durch irgendwelche Vorschriften das Bild des Isotachen-Isoklinenfeldes der gesuchten Kontur in der Bildebene $\varkappa$ und bestimmen daraus die gesuchte Kontur, indem wir die eingeführten Parameter $\varkappa$ und $\ln\overline{w}$ wieder eliminieren.

Die Zusammenflußlinie hinter dem Kreis und selbstverständlich auch die Verzweigungsstromlinie vor dem Kreis müssen mit Isoklinenlinien der Abbildung des Isotachen-Isoklinenfeldes des gesuchten Halbkörpers in die Kreisebene zusammenfallen. Das Bild des Isotachen-Isoklinenfeldes muß sich also durch die Strömung aus symmetrisch zum Kreisdurchmesser EA liegenden Quellen oder aus ebenso liegenden entgegengesetzt drehenden Wirbeln darstellen lassen. Diese Quellen bzw. Wirbel dürfen aber nur im Innern des Kreises oder höchstens auf der Kreisberandung liegen und können natürlich punktförmig, linienförmig oder flächenhaft verteilt sein.

Da im ∞ die Richtung und Geschwindigkeit eindeutig ist, nämlich $|w| = u_\infty$, $\nu = 0$, so muß die Gesamtergiebigkeit der Quellen Null sein. Die Gesamtzirkulation der Wirbel ist es schon aus Symmetriegründen.

Außerhalb des Kreises ist also die Ersatzströmung regulär. Die Höchstwerte des Potentials $\ln|w|$ müssen also (vom Kreisinnern abgesehen) auf dem Kreise selbst liegen, denn die Extremalwerte eines Potentials innerhalb eines Regularitätsgebietes können nur auf dessen Rande liegen.

Ist auf dem gesuchten Halbkörper zunächst Beschleunigung der Geschwindigkeit vorhanden bis zu einem Höchstwerte und von dort ab Verzögerung, so kann dieser Höchstwert $\ln|w|$ nur auf dem Bildkreis, also spätestens im Zusammenflußpunkt A liegen. Dieser Zusammenflußpunkt ist aber das Bild des Überganges der Zuschärfung bzw. Abrundung in die geraden parallelen Fortsetzungen. Die Stelle der Höchstgeschwindigkeit auf einem eine parallele Fortsetzung besitzenden Halbkörper muß also im Bereich der Zuschärfung bzw. Abrundung liegen und kann höchstens bis in die Übergangsstelle in den Parallelteil rücken. Bei Umkehrung der Strömung, wenn man es also mit der Zuschärfung einer Austrittskante zu tun hat, kann dieser Umstand von größter Wichtigkeit sein. Wird nämlich die Zuschärfung so ausgebildet, daß die Höchstgeschwindigkeit der Strömung erst weit nach dem Übergang

aus dem Parallelteil eintritt, und die Strömung erst von dort ab die notwendige Verzögerung erhält, so ist bei einer vorgeschriebenen Länge der Zuschärfung dieser Teil zwischen Übergang aus dem Parallelen und der Stelle der Höchstgeschwindigkeit ungenutzt und dafür danach eine um so heftigere Verzögerung, die je heftiger, desto schädlicher ist, zu erwarten. Man muß also danach trachten, die Zuschärfung in ihrer ganzen Länge zur Verzögerung der Strömungsgeschwindigkeit heranzuziehen.

Der Bildkreis der Zuschärfung habe den Radius $r = 1$. Das Extremum für $\ln|w|$ erhalten wir z. B. ohne weiteres im verlangten Punkte A, dem Bildpunkt des Überganges der Zuschärfung bzw. Abrundung in den Parallelteil, wenn wir zur Erzeugung des Isoklinenbildes nur Quellen benützen und diese nur auf der Achse selbst anbringen. Außerhalb dieser Quellen muß die Achse Stromlinie sein, im Isotachen-Isoklinenfeld also eine Isokline bedeuten. Die Potentiallinien dieses Quellenfeldes, die für uns Isotachen bedeuten, verlaufen senkrecht zu den Stromlinien, müssen die Achse also senkrecht schneiden, somit den Bildkreis in A berühren. In A liegt also tatsächlich ein Extremum für $|w|$. Die einfachste Belegung wäre eine Senke im Verzweigungspunkte E und eine ebenso große Quelle im Punkte (a, o) $(-1 < a < +1)$ von der Ergiebigkeit $2\,\delta$. Wobei wieder δ den Kantenwinkel bedeute. Hierbei wird, wie man leicht einsieht, das Extremum von $|w|$ in A zum Maximum. Wieder sei die Bildebene mit $\varkappa$ bezeichnet. Die Strömung um den Bildkreis $(r = 1)$ ist mit $u_\infty = 1$ bekanntlich

$$\chi = \varkappa + \frac{1}{\varkappa},$$

also
$$d\chi = \left(1 - \frac{1}{\varkappa^2}\right) d\varkappa = \frac{(\varkappa - 1)(\varkappa + 1)}{\varkappa^2}\, d\varkappa .$$

Für den Bildkreis selbst gilt

$$\varkappa(k) = \cos a + i \sin a = e^{i\,a}, \quad \ln \varkappa(k) = i\,a, \quad \chi(k) = \varphi(k) = e^{i\,a} + e^{-i\,a} = 2 \cos a .$$

Das Bild des Isotachen-Isoklinenfeldes des gesuchten Halbkörpers, der in der z-Ebene gelegen sei, in der Bildkreisebene $\varkappa$ soll nach vorigem durch eine Senke in $\varkappa = +1$ und eine Quelle in $\varkappa = +a$ von der Ergiebigkeit $\mu = 2\,\delta$ gegeben sein, somit der Gleichung

$$\ln - \overline{w} = \ln \left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa - a}\right)^{\frac{\delta}{\pi}}$$

entsprechen.

Den gesuchten Halbkörper findet man wieder aus

$$z = \int \frac{d\chi}{-\overline{w}} .$$

Einsetzen ergibt
$$z = \int \frac{(\varkappa - 1)(\varkappa + 1)}{\varkappa^2} \cdot \left(\frac{\varkappa - a}{\varkappa - 1}\right)^{\frac{\delta}{\pi}} d\varkappa .$$

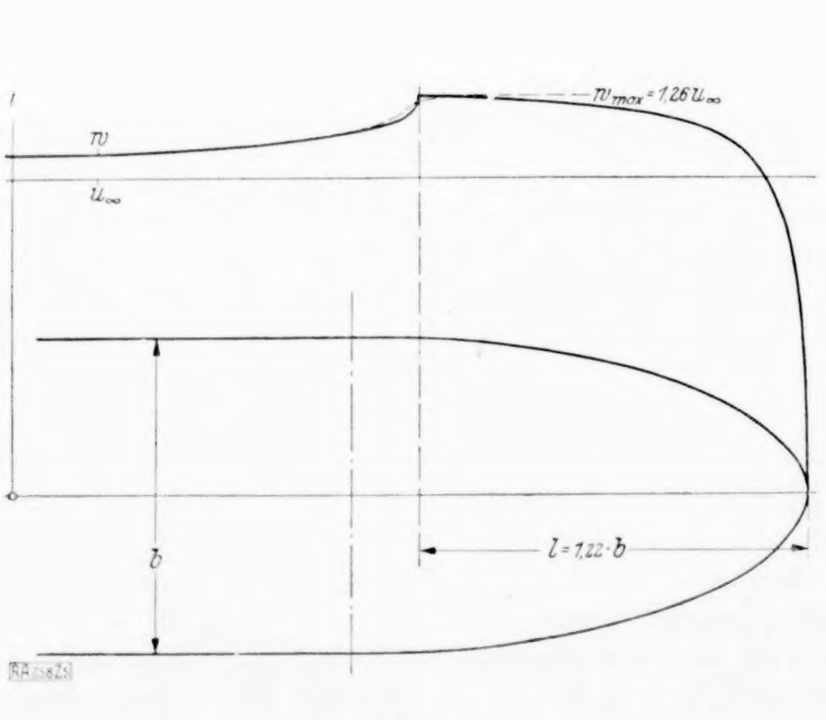


Abb. 5.

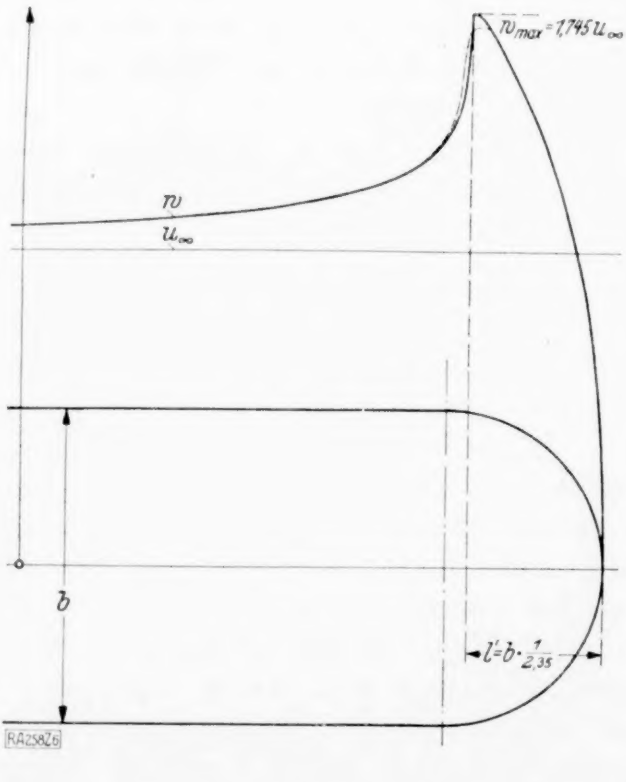


Abb. 6.

Für den Sonderfall der Abrundung $\delta = \pi$ ist

$$z = \int \frac{(\varkappa+1)(\varkappa-a)}{\varkappa^2}\, d\varkappa = \int\left(-\frac{a}{\varkappa^2} + \frac{1-a}{\varkappa} + 1\right) d\varkappa = \frac{a}{\varkappa} + (1-a)\ln\varkappa + \varkappa\,.$$

Für $\varkappa = e^{i\alpha}$ wird die Kontur des Halbkörpers gefunden. Für $\delta = \pi$ erhält man also die Abrundung

$$z = a\,e^{-i\alpha} + (1-a)\cdot i\,\alpha + e^{i\alpha}$$

$$z = a\cos\alpha + i\,a\sin\alpha + i\,(1-a)\,\alpha + \cos\alpha + i\sin\alpha\,.$$

Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil ergibt also (Abb. 5)

$$z = x + i\,y = \cos\alpha\,(1+a) + i\,(1-a)\,(\alpha + \sin\alpha)\,.$$

Aus dieser Form ergibt sich sofort, daß die für verschiedene a entstehenden Abrundungen affin zueinander sind. Durch entsprechenden Maßstab kann man sie alle auf die gleiche Breite bringen. Wenn man sie in dieser Weise aufzeichnet, können sie leicht miteinander verglichen werden:

$$\zeta = \frac{z}{2\pi(1-a)} = \frac{1+a}{2\pi(1-a)}\cos\alpha + \frac{i}{2\pi}(\alpha + \sin\alpha) = \xi + i\,\eta\,.$$

Die Breite dieses Halbkörpers ist damit $b = 1$. Die Länge der Abrundung ist

$$l = \frac{1+a}{\pi(1-a)}.$$

Ist somit $l/b = \lambda$ gegeben, so liegt damit die Größe a fest:

$$a = \frac{\pi\lambda - 1}{\pi\lambda + 1}.$$

Die größte Übergeschwindigkeit ist in der Übergangsstelle in den parallelen Teil vorhanden. Dort ist also

$$\frac{w_{\max}}{u_\infty} = \frac{2}{1+a}.$$

Die maximale Übergeschwindigkeit $w_ü$ ist somit

$$\frac{w_ü}{u_\infty} = \frac{w_{\max}}{u_\infty} - 1 = \frac{1-a}{1+a}.$$

Die Einführung von $l/b = \lambda = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1+a}{1-a}$ ergibt

$$\frac{w_ü}{u_\infty} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{b}{l}.$$

Für den Quellkörper hatte sich eine höchste Übergeschwindigkeit $\frac{w_ü}{u_\infty} = 0{,}26$ ergeben. Die neue Abrundung erreicht diesen Wert schon mit

$$\lambda = \frac{l}{b} = \frac{1}{\pi\cdot\frac{w_ü}{u_\infty}} = 1{,}22.$$

Hierfür ist
$$a = \frac{1 - \frac{w_ü}{u_\infty}}{1 + \frac{w_ü}{u_\infty}} = \frac{2}{\frac{w_{\max}}{u_\infty}} - 1 = 0{,}587\,.$$

Die auf diese Weise gefundenen Abrundungen sind Halbellipsen sehr ähnlich, deren Halbachse in Anströmungsrichtung $\sim 1{,}17\,l$ ist. Der Unterschied ist nicht beträchtlich. Die Abrundung mit $\lambda = \frac{1}{2{,}34}$ ergibt ungefähr einen Halbkreis und besitzt eine größte Übergeschwindigkeit von $\frac{w_ü}{u_\infty} \sim 0{,}74$ (Abb. 6).

Von dem soeben ermittelten Halbkörper kennen wir bisher außer der Form nun die größte Geschwindigkeit und die Stelle, an der diese eintritt. Den Geschwindigkeitsverlauf selbst kennen wir bisher noch nicht. Er ist aber sehr einfach zu bestimmen.

Aus
$$z = x + i y = (1 + a) \cos \alpha + i (1 - a)(\alpha + \sin \alpha)$$
erhalten wir
$$x = (1 + a) \cos \alpha ; \qquad \frac{dx}{d\alpha} = -(1 + a) \sin \alpha = -2 (1 + a) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2},$$
$$y = (1 - a)(\alpha + \sin \alpha); \qquad \frac{dy}{d\alpha} = +(1 - a)(1 + \cos \alpha) = 2 (1 - a) \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$
somit
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 - a}{1 + a} \cot \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} - r,$$
oder nach entsprechender Umformung
$$\cos r = (1 + a) \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2 (1 + a^2 - 2 a \cos \alpha)}}.$$

Es war aber $\varphi(s) = 2 \cos \alpha = \frac{2x}{1 + a}$, somit $\frac{d\varphi(s)}{dx} = \frac{2}{1 + a}$.

Damit ist aber auch die Geschwindigkeit gefunden. Aus
$$w = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi(s)}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d\varphi(s)}{dx} \cdot \cos r$$
erhalten wir
$$\frac{w}{u_\infty} = \sqrt{\frac{2 (1 - \cos \alpha)}{1 + a^2 - 2 a \cos \alpha}}.$$

Wie schon vorhin erhalten wir für $\cos \alpha = -1$ die Geschwindigkeit beim Übergang in den Parallelteil zu
$$\frac{w_{\max}}{u_\infty} = \frac{2}{1 + a}.$$

Nun ist noch der Geschwindigkeitsverlauf im Parallelteil ($\alpha = \pm \pi$) zu bestimmen. Da hierfür $\varkappa$ nur reelle negative Werte ($\xi < -1$) annimmt, wird in
$$z = x + i y, \quad y = \pm (1 - a) \cdot \pi = \text{const}^{7)}, \quad x = -\frac{a}{|\xi|} + (1 - a) \ln |\xi| - |\xi|$$
oder mit
$$w = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa - a}; \qquad \varkappa = \frac{a w - 1}{w - 1},$$
$$x = \frac{a (w - 1)}{a w - 1} + (1 - a) \ln \frac{1 - a w}{w - 1} + \frac{a w - 1}{w - 1}.$$
Hiermit ist implizite auch $w(x)$ gegeben.

Bemerkenswert ist, daß an der Übergangsstelle in den Parallelteil die Tangente $\frac{dw}{ds}$ des w-Verlaufs unstetig ist. Dies wird leicht verständlich, wenn man an das Verhalten des $\ln - \overline{w}$-Feldes in der Bildkreisebene an der Stelle A denkt. Ein solches Verhalten scheint aber an sich nicht erwünscht. Der Krümmungsradius der Kontur wird an der Übergangsstelle $\varrho = 0$. Das unstetige Verhalten $\frac{dw}{ds}$ an der Übergangsstelle wird vermieden, wenn man die Übergangsstelle noch etwas ausrundet. Hiermit wird dann auch der Geschwindigkeitsverlauf geglättet. Dann liegt allerdings nicht mehr die max. Geschwindigkeit an der Übergangsstelle in die Parallele, sondern etwas davor. Die Forderung, diese beiden Stellen zusammenfallen zu lassen, ist also im technischen Sinne schon etwas übertrieben, wenn sie sich auch mathematisch gerade noch erfüllen läßt.

---

[7]) Aus dem Konstantsein des Imaginärteils y des Halbkörpers ist zu ersehen, daß die Fortsetzung nach der Abrundung tatsächlich aus Parallelen zur x-Achse besteht.

5. Ermittlung endlich langer Zuschärfungen. Will man statt Abrundungen Zuschärfungen erhalten, so hat man in den obigen Formeln entsprechend $\delta < \pi$ einzuführen. Die Gleichungen sind aber dann nicht mehr explicite zu lösen. Man muß daher wieder den numerisch-zeichnerischen Weg einschlagen.

Man kann aber von vornherein schon außer dem Kantenwinkel auch noch die maximale Übergeschwindigkeit vorschreiben. Für diese ist $\varkappa = -1$:

$$\ln w_{\max} = \ln\left(\frac{2}{1+a}\right)^{\frac{\delta}{\pi}}, \qquad w_{\max}{}^{\frac{\pi}{\delta}} = \frac{2}{1+a}, \qquad a = \frac{2}{w_{\max}{}^{\frac{\pi}{\delta}} - 1}.$$

Als Durchführungsbeispiel sei wieder $\delta = \frac{\pi}{4}$ gewählt und die maximale Übergeschwindigkeit der bei der aus dem Quellkörper abgeleiteten Zuschärfung des gleichen Kantenwinkels gleich angenommen, also $\frac{w_{ü}}{u_\infty} = 0{,}06$, $a = 0{,}587$ gewählt.

Wir haben wieder $\varphi = 2\cos a$ und entsprechend den Verhältnissen der Abrundung

$$\nu = \frac{\delta}{\pi}\,\text{arctg}\,\frac{1-a}{1+a}\cot\frac{\alpha}{2}, \qquad w = \left(\frac{2\cdot(1-\cos\alpha)}{1+a^2-2a\cos\alpha}\right)^{\frac{\delta}{2\pi}}.$$

Hieraus ergibt sich

$$x = \int_{+2}^{\varphi}\frac{\cos\nu}{w}\,d-\varphi, \qquad y = \int_{+2}^{\varphi}\frac{\sin\nu}{w}\,d-\varphi$$

und hiermit die gesuchte Zuschärfung $y(x)$ nebst deren Geschwindigkeitsverteilung an der Oberfläche.

Diese Zuschärfung ist wesentlich völliger als die aus dem Quellkörper erhaltene und hat zwischen Staupunkt und größter Geschwindigkeit eine bedeutend größere Bogenlänge als diese. Als Zuschärfung einer Austrittskante ist sie nach den herrschenden Ansichten bezüglich der Möglichkeit von Wirbelablösungen also wahrscheinlich der anderen Zuschärfung mindestens gleichwertig.

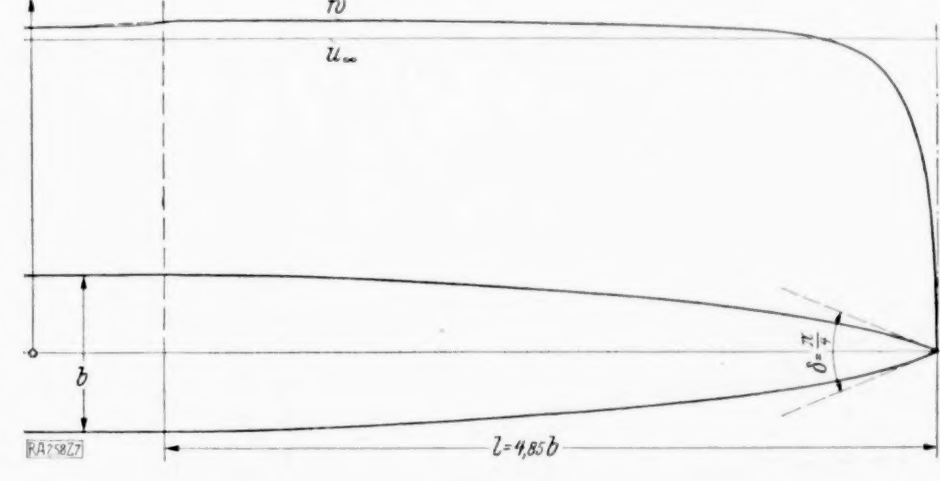


Abb. 7.

Zuschärfungen von Abflußkanten sind allgemein gebräuchlich, so bei Tragflügelprofilen, Turbinen- und Pumpenschaufeln. Auch bei räumlichen Gebilden, wie Schiffen und Luftschiffen, ist eine Zuschärfung des Hecks zweckmäßig. Zuschärfungen vorne sind vielfach bei Pumpenschaufeln und bei Schiffspropellerprofilen üblich, doch ist man sich hier über die Zweckmäßigkeit noch nicht ganz einig. Bei Schiffen wird die Zuschärfung vorne wegen des Wellenwiderstandes für nötig gehalten. Bei all diesen Gebilden bleibt aber die Frage offen, ob nicht Formen mit parallelem Mittelteil Formen, die bisher aus strömungstechnischen Gesichtspunkten ohne einen solchen gebildet waren, strömungstechnisch gleichwertig sein können. Der parallele Mittelteil verspricht in vielen Fällen wesentliche konstruktive und wirtschaftliche Vorteile, so daß die Entscheidung dieser Frage außerordentlich wichtig erscheint. Ich hoffe mit meinen Darlegungen Wege gezeigt zu haben, wie man Zuschärfungen bekommen kann, die nach bisherigen Anschauungen über Strömungsvorgänge den gebräuchlichen viel längeren Zuschärfungen mindestens gleichwertig zu sein versprechen.

6. Unsymmetrische Umströmung abgerundeter Kanten. Für die Strömung um abgerundete Vorderkanten kommt noch ein anderer Gesichtspunkt in Betracht, nämlich das Verhalten bei unsymmetrischer Anströmung. Über diese sei deshalb zum Schluß hier noch einiges gesagt.

Da unsere Halbkörper ins Unendliche reichen, müssen wir das Verhalten bei Wanderung des vorderen Staupunktes, die der wichtigste Vorgang hierbei ist, behandeln.

Zu der schon behandelten Strömung (1) müssen wir noch ein Umfließen von der einen Seite zur anderen überlagern. Das Bild dieser Zusatzströmung (2) ist bei Abbildung des Halbkörpers auf eine Halbgerade ($\varkappa < 0$)

$$\chi_2 = i\,\varkappa^{1/2} \cdot 2\,\Omega\,.$$

Das Bild der ursprünglichen Strömung ist

$$\chi_1 = +\varkappa\,;\quad \varphi_1 = +\xi\,.$$

Die Geschwindigkeit der Strömung (2) ist auf der Halbgeraden ($\xi < 0$)

$$w_2 = \pm \frac{\Omega}{|\xi|^{1/2}}\,,$$

während die Strömung (1) die Geschwindigkeit $|w_1| = |w_\infty| = 1$ haben soll.

Das Verhältnis $\frac{w_2}{w_1}$ ist aber von der besonderen Gestalt des Halbkörpers unabhängig, es gilt auch für andere Halbkörper als die Halbgerade. Der vordere Staupunkt bei symmetrischer Anströmung habe nun das Potential $\varphi_1 = 0$, der neue Staupunkt bei unsymmetrischer Strömung soll in den Punkt $\varphi_1 = \Phi_1$ wandern. Dann ist die Geschwindigkeit auf dem Halbkörper mit

$$\Omega = \Phi_1^{1/2}\,,\quad w = w_1 \pm w_2 = w_1\left(1 \pm \frac{w_2}{w_1}\right),\quad w = w_1\left(1 \pm \left(\frac{\Phi_1}{\varphi_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

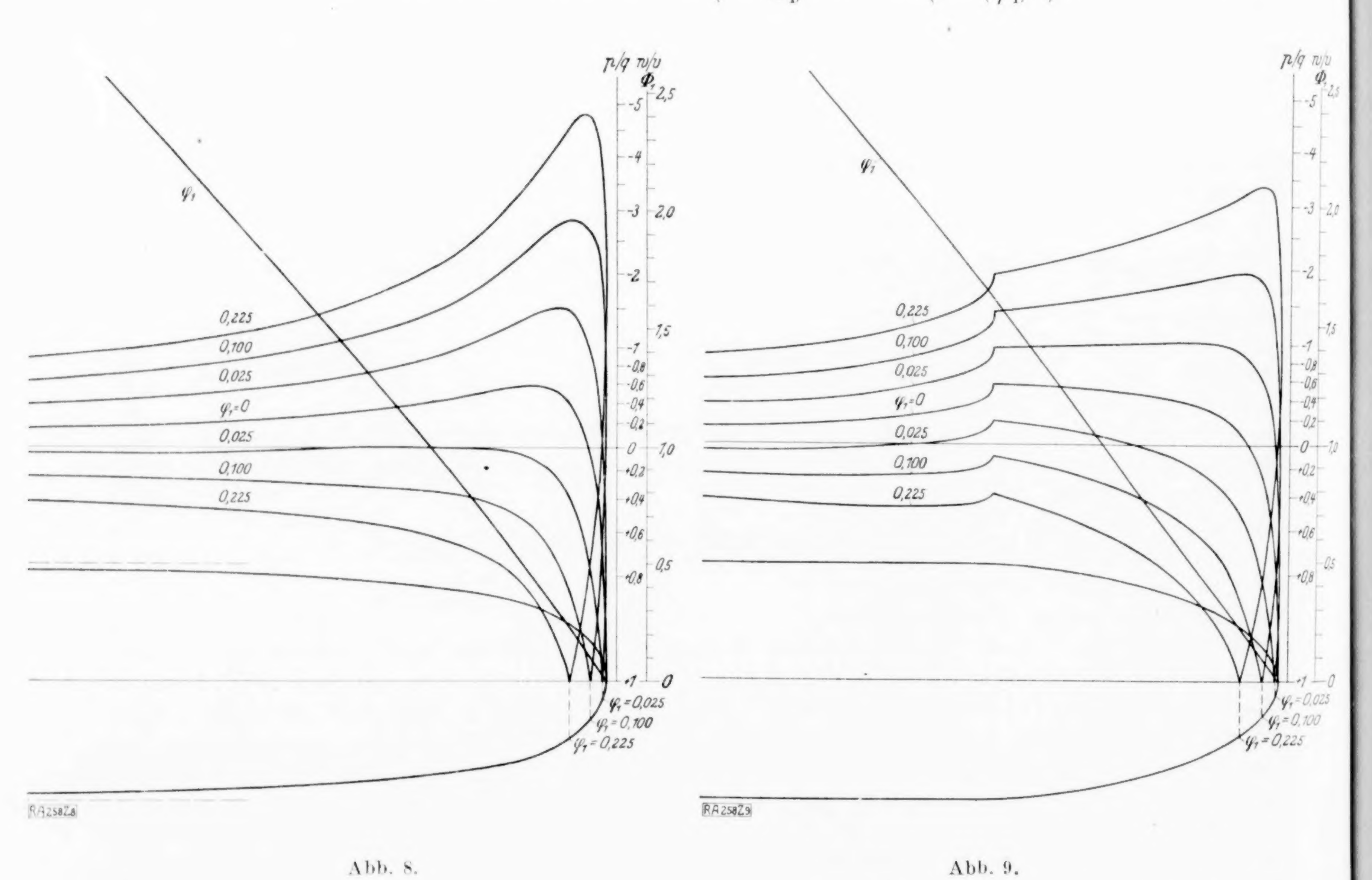


Abb. 8. Abb. 9.

Für den Quellkörper und den abgerundeten Halbkörper mit gleicher maximaler Übergeschwindigkeit bei symmetrischer Anströmung sind von mir für einige Staupunktswanderungen die Geschwindigkeitsverteilungen bestimmt worden.

Eine kleine Schwierigkeit ergibt sich dabei für die Geschwindigkeit im ursprünglichen Staupunkt, dort ist nämlich der obige Ausdruck unbestimmt.

$$\text{Für}\ \begin{Bmatrix} \varphi_1 \to 0 \\ s \to 0 \end{Bmatrix}\ \text{kann}\ \begin{Bmatrix} w_1 \to w_1' \cdot s \\ \varphi_1 \to w_1' \cdot \dfrac{s^2}{2} \end{Bmatrix}\ \text{geschrieben werden.}$$

Damit wird im ursprünglichen Staupunkt

$$w = (2\,\Phi)^{1/2} \cdot {w_1'}^{1/2},$$

so daß auch dieser Wert leicht bestimmt werden kann.

Will man einen Vergleich mit endlich langen Profilen machen, so muß man die dort auftretende Staupunktswanderung abschätzen. Das Profil habe die Tiefe t, die größte Dicke h und den Auftriebsbeiwert $\zeta_a = 2\,\pi\,k \cdot \sin\delta$, wobei also der Bildkreis bei im ∞ nicht veränderter Abbildung den Durchmesser $d = \frac{k}{2} \cdot t$ hat, wodurch h definiert ist. Beim Anstellwinkel $\delta = \gamma$ liege der vordere Staupunkt im Scheitel der Profilnase, es herrsche hierbei also glatter Eintritt.

Die Staupunktswanderung ist dann

$$\Phi_1 = (\cos 2\,\delta - \cos 2\,\gamma) \cdot \frac{k}{2} \cdot t, \quad \Phi_1 = (\cos 2\,\delta - \cos 2\,\gamma) \cdot \frac{k}{2}\,\frac{t}{h} \cdot h\,.$$

Setzt man h und die Breite des entsprechenden Halbkörpers einander gleich, so ist die entsprechende Staupunktwanderung am Halbkörper gefunden.

Den zu einem Profil entsprechenden Halbkörper findet man durch Konstruktion einer Profilmittellinie und deren Streckung in eine Gerade.

Man hat es auf diese Weise nicht schwer, den Einfluß der Variation von Profilnasen auf die Geschwindigkeitsverteilung bei Änderung des Anstellwinkels zu untersuchen.

Der Vergleich der Ergebnisse für die beiden durchgeführten Beispiele zeigt, daß der Einfluß dieser Formgebung sehr beachtlich sein kann. 258

Über Markoffsche Ketten höherer Ordnung.

Von *Günther Schulz* in Berlin.

(Aus dem Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin.)

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung spricht man von einer Markoffschen Kette q-ter Ordnung, wenn die Wahrscheinlichkeit eines Merkmals von den q ($q = 1, 2, \ldots$) zuletzt erhaltenen Merkmalen abhängt. Zur Veranschaulichung diene das folgende Urnenschema: Von k^q Urnen ist eine jede mit einer Gruppe $(x_{-q}, \ldots, x_{-2}, x_{-1})$ von q Zahlen bezeichnet, deren jede die Werte $1, 2, \ldots, k$ annehmen kann. Die Zahlengruppen sind also die Variationen q-ter Klasse mit Wiederholung, die aus den k Zahlen $1, 2, \ldots, k$ als Elementen gebildet werden können und deren Anzahl k^q ist. Jede der Urnen enthält in irgendwelchen Mischungsverhältnissen Lose mit den Zahlen $1, 2, \ldots, k$ als Merkmal. Die Wahrscheinlichkeit, aus der mit $(x_{-q}, \ldots, x_{-2}, x_{-1})$ bezeichneten Urne ein Los mit dem Merkmal x ($x = 1, 2, \ldots, k$) zu ziehen, ist gegeben und sei mit

$$v\,(x;\, x_{-q}, \ldots, x_{-2}, x_{-1})$$

bezeichnet. Die v heißen Übergangswahrscheinlichkeiten und bilden eine $(q+1)$-dimensionale Matrix $\mathfrak{V}$. Zur Ziehung wird die mit $(x_{-q}, \ldots, x_{-2}, x_{-1})$ bezeichnete Urne immer dann benutzt, wenn das Ergebnis der letzten Ziehung x_{-1}, das der vorletzten x_{-2}, das der drittletzten $x_{-3}, \ldots$, das der q-tletzten x_{-q} gewesen ist. Um das Spiel einzuleiten, müssen noch eine Anzahl weiterer Urnen vorhanden sein, die ebenfalls Lose mit den Merkmalen $1, 2, \ldots, k$ enthalten und von denen jede höchstens einmal benutzt wird. Ihnen mögen folgende gegebene Wahrscheinlichkeitsverteilungen entsprechen:

$w_{1-q}\,(x)$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$v_{2-q}\,(x;\, x_{-1})$	$v_{-1}\,(x;\, x_{2-q}, \ldots, x_{-2}, x_{-1})$
$v_{3-q}\,(x;\, x_{-2}, x_{-1})$	$v_0\,(x;\, x_{1-q}, \ldots, x_{-2}, x_{-1})\,.$

$w_{1-q}\,(x)$ ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Anfangsziehung, die die Nummer $1-q$ trägt, ein Los mit dem Merkmal x zu ziehen; ferner ist beispielsweise $v_{3-q}\,(x;\, x_{-2}, x_{-1})$ die Wahr-

scheinlichkeit, bei der Ziehung mit der Nummer $3-q$ das Merkmal x zu erhalten unter der Voraussetzung, daß die beiden vorhergehenden Ziehungen erst x_{-2} und dann x_{-1} ergeben haben. Bei einer Kette erster Ordnung ($q=1$) ist außer $\mathfrak{V}$ nur $w_0(x)$ gegeben. Natürlich ist

$$\sum_{x=1}^{k} w_{1-q}(x) = 1\,,$$

ebenso ergibt für jedes $v_{2-q}, v_{3-q}, \ldots, v_0, v$ die über x von 1 bis k erstreckte Summe 1, welches auch immer die nach dem Strichpunkt stehenden Parameterwerte seien. Von den $w_{1-q}, v_{2-q}, \ldots, v_0, v$ können beliebige verschwinden, wenn nur immer die genannten Summen 1 ergeben. Bei den Ziehungen mit den Nummern 1, 2, ... sind die gegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten v von der Nummer der Ziehung unabhängig.

A. Markoff hat sich in mehreren Arbeiten[1]) unter einschränkenden Voraussetzungen über die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten nur mit dem Fall $q=1$ näher beschäftigt, und zwar gleich mit dem Summenproblem, d. h. mit der Frage nach der Wahrscheinlichkeit $W_n(X)$ dafür, daß die Summe der Merkmale von n Ziehungen einen bestimmten Wert X hat, bei großem n. Die näherliegende Frage nach dem asymptotischen Verhalten von $w_n(x)$, der Wahrscheinlichkeit dafür, daß die n-te Ziehung das Merkmal x liefert, ist im Fall $q=1$ für eine beliebige Matrix $v(x; x_{-1})$ in voller Allgemeinheit zuerst von R. v. Mises erledigt worden[2]). Auf Grund der dort erhaltenen Ergebnisse konnte dann das Summenproblem für diesen Fall behandelt werden ohne die von Markoff gemachten Voraussetzungen, die die Positivität der Übergangswahrscheinlichkeiten betrafen[3]).

Im folgenden soll nun gezeigt werden, wie die Untersuchung von $w_n(x)$ für Markoffsche Ketten höherer Ordnung ($q=2, 3, \ldots$) auf den Fall $q=1$ zurückgeführt werden kann, womit auch ein Weg zur vollständigen Behandlung des Summenproblems für derartige Ketten gewiesen ist[4]).

Zunächst werde die q-dimensionale Wahrscheinlichkeit

$$w_n(x_{1-q}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, x)$$

eingeführt, die dafür besteht, daß bei der n-ten Ziehung das Merkmal x, bei der $(n-1)$-ten das Merkmal $x_{-1}, \ldots$, bei der $(n-q+1)$-ten das Merkmal x_{1-q} erhalten wird. Offenbar ist

$$\sum_{x_{1-q}} \cdots \sum_{x_{-2}} \sum_{x_{-1}} \sum_{x} w_n(x_{1-q}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, x) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Jetzt läßt sich leicht eine Rekursionsformel aufstellen; es ist nämlich

$$w_n(x_{1-q}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, x) = \sum_{x_{-q}} v(x; x_{-q}, \ldots, x_{-2}, x_{-1})\, w_{n-1}(x_{-q}, x_{-q+1}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}) \quad (2)$$

mit der Anfangsbedingung

$$w_0(x_{1-q}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, x) = w_{1-q}(x_{1-q}) \cdot v_{2-q}(x_{2-q}; x_{1-q}) \ldots v_0(x; x_{1-q}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}) \quad (3).$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus

$$w_n(x) = \sum_{x_{1-q}} \cdots \sum_{x_{-2}} \sum_{x_{-1}} w_n(x_{1-q}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

[1]) Von den nicht in russischer Sprache geschriebenen Arbeiten sei hier genannt: Acta math. **33**, 1910, S. 87 bis 104, und der Anhang II in der „Wahrscheinlichkeitsrechnung" (übers. von H. Liebmann), Leipzig 1912.

[2]) R. v. Mises: Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik, I. Bd.: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Leipzig und Wien 1931), S. 533 bis 549. Auf dieses Werk sei auch wegen mancher hier verwendeten Begriffe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwiesen.

[3]) Günther Schulz: Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. **11**, 1931, S. 444.

[4]) An Literatur über Markoffsche Ketten höherer Ordnung ist mir nur die Dissertation von A. Aeppli, Zur Theorie verketteter Wahrscheinlichkeiten (Zürich 1924), bekannt geworden. Dort werden im Abschnitt II für die Alternativketten höherer Ordnung nach einer geometrisch-kombinatorischen Methode Formeln für endliches n aufgestellt.

Die Rekursionsformel (2) kann nun so umgeformt werden, daß statt der $(q+1)$-dimensionalen Matrix $\mathfrak{V}$ eine zweidimensionale Matrix $\mathfrak{V}'$ auftritt. Man denke sich dazu alle k^q aus den Zahlen $1, 2, \ldots, k$ gebildeten Variationen q-ter Klasse mit Wiederholung aufgeschrieben und mit $1', 2', \ldots$ durchnumeriert. Die Variable x', die die Werte $1', 2', \ldots, (k^q)'$ annehmen kann, steht also an Stelle einer Gruppe von q Zahlen, deren jede die Werte $1, 2, \ldots, k$ annehmen kann. Nach Einführung dieser Bezeichnung läßt sich Gl. (2), wie folgt, schreiben

$$w_n'(x') = \sum_{y'} v'(x'; y')\, w'_{n-1}(y') \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5).$$

Der Summationsbuchstabe y' läuft dabei von $1'$ bis $(k^q)'$. $w_\nu'(x')$ ist gleich $w_\nu(x_{1-q}, \ldots, x_{-1}, x)$, falls $x' = (x_{1-q}, \ldots, x_{-1}, x)$ ist. $\mathfrak{V}'$ mit den Elementen $v'(x'; y')$ ist eine Matrix von k^q Zeilen und k^q Spalten, also mit k^{2q} Elementen. Am Schnittpunkt der Zeile x' mit der Spalte y' steht 0 als Element, es sei denn, daß die letzten $q-1$ Zahlen der Merkmalgruppe y' mit den ersten $q-1$ Zahlen der Merkmalgruppe x' übereinstimmen. In diesem Fall wird dort $v(x; x_{-q}, \ldots, x_{-2}, x_{-1})$ als Element geschrieben, wobei x die letzte Zahl der Gruppe x' ist und $(x_{-q}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}) = y'$. Ist beispielsweise

$$q = 5, \quad y' = (1, 3, 2, 1, 6), \quad x' = (3, 2, 1, 6, 4),$$

dann ist

$$v'(x'; y') = v(4;\ 1, 3, 2, 1, 6).$$

Die Matrix $\mathfrak{V}'$ enthält also alle k^{q+1} Elemente von $\mathfrak{V}$ und außerdem $k^{2q} - k^{q+1}$ Nullen. Zur Verdeutlichung sei $\mathfrak{V}'$ im Fall $k = 2$ (Alternative), $q = 2$ aufgeschrieben:

	$1' = (1,1)$	$2' = (1,2)$	$3' = (2,1)$	$4' = (2,2)$
$1' = (1,1)$	$v(1;1,1)$	0	$v(1;2,1)$	0
$2' = (1,2)$	$v(2;1,1)$	0	$v(2;2,1)$	0
$3' = (2,1)$	0	$v(1;1,2)$	0	$v(1;2,2)$
$4' = (2,2)$	0	$v(2;1,2)$	0	$v(2;2,2)$

Man liest z. B. ab, daß $v'(2'; 3') = v(2; 2, 1)$ und $v'(4'; 3') = 0$ ist. Jede Zeile und jede Spalte von $\mathfrak{V}'$ enthält k Elemente aus $\mathfrak{V}$, die natürlich auch Null sein können. Aus der Definition der Matrix $\mathfrak{V}'$ ergibt sich, daß sie eine sog. „stochastische" Matrix ist, d. h. nur aus nichtnegativen Elementen besteht, die in jeder Spalte 1 als Summe ergeben. Von den k^{2q} Elementen von $\mathfrak{V}'$ können höchstens k^{q+1} von Null verschieden sein; obwohl das Verhältnis $k^{q+1} : k^{2q}$ mit wachsendem k und q immer kleiner wird, zieht dies nicht nach sich, daß $\mathfrak{V}'$ für genügend großes k oder q zerfallen muß[5]).

Die Identität der Rekursionsformeln (2) und (5) folgt unmittelbar, wenn man die $v'(x'; y')$ deutet als Wahrscheinlichkeiten für den Übergang zwischen zwei sich teilweise überdeckenden Merkmalgruppen, die $q-1$ Zahlen gemeinsam haben:

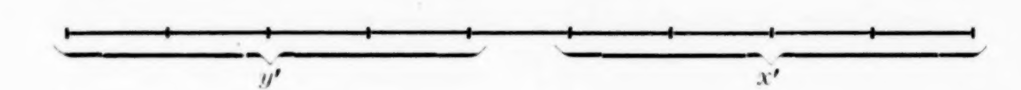
x'

y'

Gl. (5) hat nun genau den Bau und die Eigenschaften der Gleichung, die der Theorie der Ketten erster Ordnung zugrunde liegt, so daß diese in vollem Umfang übertragen werden kann. Zur Untersuchung des Verhaltens von $w_n(x)$, der Wahrscheinlichkeit, bei der n-ten Ziehung das Merkmal x zu erhalten, bei großem n, ordne man der gegebenen Matrix $\mathfrak{V}$ nach der oben gegebenen Vorschrift die Matrix $\mathfrak{V}'$ zu und untersuche sie mit Hilfe der bei v. Mises aufgestellten Sätze[6]) daraufhin, ob $\mathfrak{V}'$ unzerlegbar ist oder total oder partiell zerlegbar, ob die Matrizenfolge $\mathfrak{V}'^{\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ gegen eine Grenzmatrix konvergiert oder ob sie periodisch konvergiert, und schließlich, ob alle Spalten der Grenzmatrix übereinstimmen oder nicht. Es gilt ferner der Satz: Sind alle Elemente von $\mathfrak{V}$ positiv, so ist $\mathfrak{V}'$ sicher unzerlegbar. Der

[5]) Über den Begriff der „Zerlegbarkeit" oder des „Zerfalls" einer Matrix vgl. R. v. Mises a. a. O., S. 535 bis 536.
[6]) A. a. O., S. 537 bis 548, Satz I bis V.

Beweis hierfür ergibt sich am einfachsten aus der Betrachtung der Matrix $\mathfrak{B}'^q$, der q-ten Potenz von $\mathfrak{B}'$. Falls $\mathfrak{B}$ nur positive Elemente hat, besteht diese Matrix auch nur aus positiven Elementen, die die Wahrscheinlichkeiten für den Übergang zwischen zwei aneinanderstoßenden, sich also nicht mehr überdeckenden Zahlengruppen aus der Merkmalfolge



darstellen, ist also unzerlegbar. Aus der Unzerlegbarkeit von $\mathfrak{B}'^q$ folgt aber die von $\mathfrak{B}'$.

Existiert nun

$$\lim_{n \to \infty} w_n(x_{1-q}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, x) \quad \ldots \quad (6),$$

dann existiert auch

$$\lim_{n \to \infty} w_n(x) = \sum_{x_{1-q}}' \ldots \sum_{x_{-2}}' \sum_{x_{-1}}' \lim_{n \to \infty} w_n(x_{1-q}, \ldots x_{-2}, x_{-1}, x) \quad \ldots \quad (7).$$

Die Eigenschaften der periodischen Konvergenz und der Abhängigkeit von der gegebenen Anfangsverteilung $w_0(x_{1-q}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, x)$ übertragen sich im allgemeinen von $w_n(x_{1-q}, \ldots, x)$ auf $w_n(x)$. Die Grenzverteilung (6) hat gewisse Symmetrieeigenschaften, die der Einfachheit halber am Fall $q = 3$ aufgewiesen werden sollen. Da

$$w_n(x) = \sum_s' \sum_t' w_n(s, t, x) = \sum_s' \sum_t' w_{n+1}(s, x, t) = \sum_s' \sum_t' w_{n+2}(x, s, t) \quad \ldots \quad (8),$$

so folgt nach beiderseitigem Grenzübergang $n \to \infty$: Existiert die q-dimensionale Grenzverteilung (6), dann hat sie die Eigenschaft, daß Summation über beliebige $q - 1$ Argumente stets dieselbe eindimensionale Grenzverteilung (7) liefert. Im Fall der periodischen Konvergenz gibt es mehrere Grenzmatrizen, die ähnliche Eigenschaften haben.

Für die Behandlung des Summenproblems ist die hier eingeführte Matrix $\mathfrak{B}'$ nicht unmittelbar zu verwenden. Mit Hilfe der Verteilung $w_n(x_{1-q}, \ldots, x)$ lassen sich aber durch

$$w_n(x_{1-q}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, x) = \sum_y' w_{n-1}(y, x_{1-q}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}) \, v_n(x; x_{-1}) \quad \ldots \quad (9)$$

(Operation der Teilung!) Übergangswahrscheinlichkeiten $v_n(x; x_{-1})$ definieren, die allerdings noch von n, der Nummer der Ziehung, abhängen[7]). Konvergieren alle $w_n(x_{1-q}, \ldots, x)$ gegen positive Werte, dann konvergiert auch die Folge der Matrizen $\mathfrak{B}_n$ mit den Elementen $v_n(x; x_{-1})$ für $n \to \infty$ gegen eine Grenzmatrix; sind in der Grenzverteilung (6) gewisse Werte Null, so braucht es keine bestimmte Grenzmatrix zu geben, da Elemente in ihr unbestimmt bleiben können. Nun gilt

$$w_n(x) = \sum_y' v_n(x; y) \, w_{n-1}(y) \quad \ldots \quad (10).$$

Von der Betrachtung dieser Gleichung geht man nun vorteilhaft bei der Behandlung des Summenproblems aus. Statt der Folge der Potenzen $\mathfrak{B}^n$ im Fall $q = 1$ ist in den Fällen $q = 2, 3, \ldots$ die Folge der Partialprodukte $\mathfrak{P}_n = \mathfrak{B}_n \mathfrak{B}_{n-1} \ldots \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_1$ zu untersuchen[8]).

Es sei darauf hingewiesen, daß es für die hier gegebene Reduktion der Markoffschen Ketten höherer Ordnung ganz wesentlich war, daß die Theorie der Übergangswahrscheinlichkeiten in voller Allgemeinheit, ohne Bedingungen hinsichtlich der Positivität der Elemente, zur Verfügung stand; denn die oben eingeführte Matrix $\mathfrak{B}'$ hatte ja zahlreiche verschwindende Elemente. 280

[7]) Man beachte, daß im Gegensatz zur hier eingeführten Bezeichnung bei v. Mises mit $v_n(x; y)$ ein Element der Matrix $\mathfrak{B}^n$, der n-ten Potenz der Matrix $\mathfrak{B}$, bezeichnet ist.

[8]) Im Fall zweireihiger (Alternative), von der Nummer der Ziehung abhängiger Matrizen von Übergangswahrscheinlichkeiten ist das Summenproblem bereits unter gewissen Voraussetzungen über die Konvergenz der $v_n(x; y)$ von S. Bernstein behandelt worden (Math. Ann. **97**, 1926, S. 1 bis 59).

KLEINE MITTEILUNGEN

Über die kräftefreie Bewegung einer idealen Flüssigkeit in einem elastischen Rohre. Die klassischen Untersuchungen von Riemann[1]) und Hugoniot[2]) haben sich zwar schon längst in der Gasdynamik[3]) und selbst in technischen Anwendungen dieses Gebietes[4]) als sehr fruchtbar erwiesen, von den Hydraulikern dagegen sind sie bisher kaum beachtet worden, wohl infolge des praktisch ja vollkommen berechtigten Strebens, lineare Differentialgleichungen zu bekommen[5]). Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist es nun, für die Bewegung einer idealen Flüssigkeit in einem horizontalen elastischen Rohre — also bei Ausschluß von Massenkräften — eine die realen Verhältnisse besser approximierende nicht lineare Differentialgleichung abzuleiten und als Anwendung daraus einige vielleicht auch praktisch nicht uninteressante Schlüsse zu ziehen. Zur Rechtfertigung der zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen nötigen vereinfachenden Annahmen soll zunächst ganz kurz auf die großen Schwierigkeiten hingewiesen werden, die einer strengen Lösung der Aufgabe im Wege stehen.

Der innere Radius R des kreisförmig angenommenen Querschnittes wird an einer bestimmten Stelle nicht bloß von dem dort herrschenden Druck allein abhängen, sondern von der momentanen Druckverteilung entlang des ganzen Rohres. Ist schon die Behandlung des damit angedeuteten statischen Problemes sehr schwierig, so ist an eine auch nur einigermaßen befriedigende Erledigung des entsprechenden dynamischen Problemes dermalen wohl kaum zu denken. Wir sehen daher von der Trägheit und den Längsspannungen der Rohrwand gänzlich ab und nehmen an, daß R nur von dem an der betreffenden Stelle vorhandenen Druck allein abhänge. Ebenso vernachlässigen wir auch die infolge des Gewichtes der Flüssigkeit verursachte Änderung des Druckes in einem und demselben Querschnitt. Wegen der radialen Symmetrie würde man nun mit einem zwei-dimensionalen Ansatz allerdings auskommen, aber die dann sich einstellende Randwertaufgabe bietet selbst in den einfachsten Fällen unüberwindliche Schwierigkeiten dar. Es ergibt sich also die zwingende Notwendigkeit, bei einem ein-dimensionalen Ansatz zu bleiben und die meist ohnehin kleine radiale Strömungskomponente außer acht zu lassen.

1. Aufstellung der Bewegungsgleichung.

Da sich später zeigen wird, daß die Integration der Bewegungsgleichung praktisch nur dann geleistet werden kann, wenn man sich auf die Betrachtung solcher Bewegungen beschränkt, die aus der Ruhe hervorgehen, so wollen wir uns gleich von vornherein auf diesen Fall einstellen. Es soll zur Zeit $t = 0$ der Druck p — genauer: die Differenz zwischen innerem und äußerem Druck — durchwegs verschwinden und der innere Radius des Querschnittes entlang des ganzen Rohres $R_0 = \text{const}$ sein. Ferner sollen a und x die Abszissen eines und desselben Flüssigkeitsquerschnittes und ϱ_0 bzw. ϱ die dort vorhandene Dichte am Anfang und zu einer beliebigen Zeit t bedeuten.

Eine erste Differentialgleichung liefert zunächst der Impulssatz, indem wir eine Flüssigkeitsschicht betrachten, die anfänglich von den beiden Querschnitten mit den Abszissen a und $a + da$ begrenzt wird. Im Gegensatz zu den meist üblichen Ableitungen der Bewegungsgleichungen wollen wir jedoch beachten, daß die Radien der beiden Querschnitte im allgemeinen verschieden sein werden. Ist R der Radius des zur Abszisse a gehörigen Querschnittes, dann haben wir für den Radius bei $a + da$ zu setzen:

$$R + \frac{dR}{dp} \cdot \frac{\partial p}{\partial a} \cdot da$$

und damit ergibt sich bei Berücksichtigung der Glieder erster Ordnung in bekannter Weise:

$$\varrho_0 R_0^2 \frac{\partial x^2}{\partial t^2} = -R \cdot \left(R + 2p\frac{dR}{dp}\right) \cdot \frac{\partial p}{\partial a} \quad . \quad . \quad (1).$$

Als zweite Gleichung folgt weiter aus der Kontinuitätsbedingung:

$$\varrho R^2 \frac{\partial x}{\partial a} = \varrho_0 R_0^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Mit Rücksicht auf eine von Hugoniot[6]) gemachte Bemerkung sei darauf hingewiesen, daß sich (2) auch aus dem Energiesatz hätte gewinnen lassen, da die Energiegleichung wegen (1) hier ebenfalls eine einmalige Integration nach der Zeit gestattet.

Um aus (1) und (2) p und ϱ eliminieren zu können, setzen wir

$$\varrho = \varrho_0 \cdot (1 + Ap)$$

und

$$R = R_0 \cdot f(p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Dann wird (2):

$$(1 + Ap) \cdot f^2(p) = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial a}}.$$

Die Auflösung nach p möge ergeben:

$$p = g\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial p}{\partial a} = g'\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right) \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Wegen (3), (4) und (5) wird dann (1):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \psi\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right) \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

also eine Gleichung von derselben Form, wie sie Hugoniot[7]) seinen Betrachtungen zugrunde gelegt hat.

Wenn wir insbesonders $\varrho = \varrho_0$ annehmen und voraussetzen, daß der Druck stets so niedrig bleibt, daß wir näherungsweise

$$R = R_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{\alpha}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

setzen können, dann läßt sich die Elimination von p leicht ausführen, und wir bekommen die Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\alpha}{2\varrho_0} \cdot \frac{3 - 2\sqrt{\omega}}{\omega^{5/2}} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} \quad . \quad . \quad (6'),$$

---

1) Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen .... Ges. Werke, Leipzig 1876, S. 144 ff.

2) Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaites, Journ. de l'éc. pol. Cah. 57 (1887), S. 1 bis 97, Cah. 58 (1889), S. 1 bis 125.

3) J. Ackeret: Gasdynamik, Hdb. d. Phys. Hgg. v. Geiger und Scheel, VII. Bd. (1927), S. 322 ff.

4) K. Kobes: Die Durchschlagsgeschwindigkeit bei den Luftsauge- und Druckbremsen. Ztschr. d. österr. Ing. und Arch.-Ver., 62. Jahrg. (1910), S. 553 bis 579.

5) Z. B. L. Alliévi: Allg. Theorie ü. d. veränderl. Bewegg. d. Wassers in Leitungen. Deutsche Bearb. von R. Dubs und V. Bataillard, Berlin 1909.

6) l. c. Cah. 57, S. 46.

7) l. c. Cah. 58, S. 5. An Stelle von x steht dort die mit u bezeichnete Verschiebung.

wobei a von R_0 und der Beschaffenheit des Rohres abhängt und der Kürze wegen $\frac{\partial x}{\partial a} = \omega$ gesetzt ist. Es sei nebenbei noch bemerkt, daß man (6') auch so gewinnen kann, daß man das Rohr als starr annimmt und die inkompressible Flüssigkeit durch eine fingierte kompressible ersetzt, deren Dichte durch die tatsächliche Ausdehnung des Rohres bestimmt ist[8]).

2. Über die Integration der Bewegungsgleichung.

Die Gl. (6) ließe sich zwar durch die Legendresche Transformation in eine lineare überführen[9]), doch hätte man praktisch damit nicht viel gewonnen, da sich für die zur Behandlung allgemeinerer Probleme notwendige Riemannsche Funktion keine brauchbare Darstellung finden läßt. Wenn wir uns aber mit der Untersuchung solcher Bewegungen begnügen, die aus der Ruhe entstehen, dann wird eine von den Differentialgleichungen der Charakteristiken integrabel und liefert das folgende Zwischenintegral[10]):

$$u + \chi(\omega) = \chi(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

wobei $u = \frac{\partial x}{\partial t}$ die Geschwindigkeit der betrachteten Schichte bedeutet und $\chi'^2(\omega) = \psi(\omega)$. Dieses Integral wird geometrisch bekanntlich durch die Gesamtheit aller abwickelbaren Flächen mit einem festen Richtkegel dargestellt. Die Gleichung einer solchen Fläche erhält man also, indem man aus

$$x - \lambda \cdot a + G(\lambda) \cdot t + F(\lambda) = 0 \quad . \quad . \quad (8)$$

und

$$-a + G'(\lambda) \cdot t + F'(\lambda) = 0 \quad . \quad . \quad (9)$$

den Parameter λ eliminiert. Hier kann man aber nur noch über $F(\lambda)$ willkürlich verfügen; denn denken wir uns aus (9) $\lambda(a, t)$ berechnet und in (8) eingesetzt, dann wird wegen (9):

$$\omega = \frac{\partial x}{\partial a} = \lambda - \frac{\partial \lambda}{\partial a} \cdot [-a + G'(\lambda) \cdot t + F'(\lambda)] = \lambda$$

und ebenso auch:

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = -G(\lambda).$$

Da aber wegen (7)

$$-G(\lambda) + \chi(\lambda) = \chi(1) \quad . \quad . \quad . \quad (7'),$$

so können wir für (8) auch schreiben:

$$x - \lambda \cdot a + [\chi(\lambda) - \chi(1)] \cdot t + F(\lambda) = 0 \quad . \quad (8'),$$

wo nun $F(\lambda)$ so zu wählen ist, daß die vorgegebenen Randbedingungen erfüllt werden[11]).

3. Anwendung auf eine Frage aus der Mechanik des Blutkreislaufes.

Die Kenntnis des zeitlichen Verlaufes des Blutdruckes in der linken Herzkammer und in der sich daran anschließenden Aorta ist von großem Interesse für die interne Medizin[12]). Da direkte Beobachtungen natürlich mit großen Schwierigkeiten verbunden sind, so wäre es wichtig zu wissen, ob man nicht aus dem an einer bequem zugänglichen großen Arterie aufgenommenen Pulsdiagramm diesbezügliche Schlüsse ziehen könnte. Gehörig idealisiert würde es sich also um die Lösung der folgenden Aufgabe handeln: „Kann man durch Beobachtung des Druckes an einer bestimmten Stelle unseres elastischen Rohres $x = \xi$ die in (8') auftretende Funktion $F(\lambda)$ bestimmen, wenn die in (4') enthaltenen Konstanten R_0 und α bekannt sind?“

Für die analytische Behandlung dieser Frage ist es zweckmäßig, an Stelle des Druckes mittels (2) und (4') für $\varrho = \varrho_0$ die Längsdilatation

$$\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_{x = \xi} = \overline{\omega}(t)$$

an der festen Stelle $x = \xi$ als gegeben anzunehmen. Da $x = \xi = \text{const}$ bleiben soll, hat man zunächst nach (8') die folgende Beziehung zwischen a und t:

$$\xi - \lambda a + [\chi(\lambda) - \chi(1)] \cdot t + F(\lambda) = 0,$$

und indem man daraus und aus (9) a eliminiert, kommt wegen (7'):

$$\xi + [\chi(\lambda) - \lambda \cdot \chi'(\lambda) - \chi(1)] \cdot t \\ + F(\lambda) - \lambda \cdot F'(\lambda) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Da nun $\frac{\partial x}{\partial a} = \lambda$, so hat man auch $\lambda = \overline{\omega}(t)$, und wenn man daraus umgekehrt t als Funktion von λ darstellen kann, also $t = \tau(\lambda)$, erhält man aus (10):

$$F(\lambda) = \lambda \cdot \int_1^{\lambda} \tau(\lambda) \cdot \left[\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\chi(\lambda)}{\lambda}\right) - \frac{\chi(1)}{\lambda^2}\right] \cdot d\lambda - \xi + C \cdot \lambda.$$

Da aber die Bewegung aus der Ruhe entstehen soll, so muß $x(a, o) = a$ und auch $\lambda(a, o) = 1$ sein, woraus man noch $C = \xi$ findet.

Ohne auf die tiefer liegenden Gründe hierfür einzugehen[13]), wollen wir uns mit der Feststellung begnügen, daß mit der oben entwickelten Methode die eingangs gestellte Frage nur in dem praktisch kaum auftretenden Falle beantwortet werden könnte, wo der Druck und damit auch die Längsdilatation der Flüssigkeit an einer bestimmten Stelle des Rohres ständig wachsen oder ständig abnehmen, was aber gerade für die Pulskurve nicht zutrifft. Aber selbst dann, wenn alle geforderten Bedingungen erfüllt wären, hätte die soeben gefundene Lösung unserer Aufgabe nur einen durch bisher nicht erwähnte Umstände erheblich eingeschränkten Gültigkeitsbereich. Aus der Form unserer Gl. (6) ergibt sich nämlich, daß auch hier eine dem bei Gasen ja tatsächlich beobachteten Riemann-Hugoniotschen Phänomen[14]) analoge Erscheinung auftreten müßte, daß sich also trotz stetiger Anfangs- und Randbedingungen nach einiger Zeit Unstetigkeiten entwickeln können. Während aber bei Gasen unter gewöhnlichen Verhältnissen diese Erscheinung sich erst in Rohren von mehreren Kilometer Länge zeigen würde[15]), könnte man nachweisen, daß sie sich bei Gummischläuchen bereits in einer Entfernung von einigen Metern von dem in Bewegung gesetzten Ende der Flüssigkeitssäule einstellen müßte. Da man aber die in Rohrleitungen auftretenden, mitunter verhängnisvollen plötzlichen Drucksteigerungen durch Unstetigkeiten in den Randbedingungen selber schon erklärt, eventuell noch verstärkt durch Reflexion und Resonanz, und mir keine Beobachtungen bekannt geworden sind, die man durch das eben erwähnte Phänomen deuten könnte, so will ich dermalen von einer weiteren Erörterung dieser Frage absehen.

A. Huber, Freiburg (Schweiz). 289

[8]) Eine ähnliche Überlegung bei E. Jouguet, Théorie générale des coups de bélier, S. 19 ff. in den Rapports établis à l'occasion du 2e congrès de la houille blanche, Paris (1914).

[9]) J. Hadamard: Leçons sur la propagation des ondes . . . Paris (1903), S. 163.

[10]) Vgl. z. B. E. Goursat: Cours d'analyse, T. III, S. 72 f., 4e éd. (1927).

[11]) Hugoniot: l. c. Cah. 58, S. 11 ff.

[12]) Vgl. z. B. den Artikel: Einführung in die Mechanik des Kreislaufes von A. Müller in Abderhalden, Handb. d. biolog. Arbeitsmethoden, Abt. V., Teil 8., S. 224 f.

[13]) Hadamard: l. c. S. 171 f.

[14]) Hadamard: l. c. S. 181 ff.

[15]) Hugoniot: l. c. Cah. 58, S. 42.

Geschwindigkeitsermittlung beim Römergetriebe und ähnlichen Getrieben. Bei der in den Abb. 1 und 2 angegebenen offenen Kette, bestehend aus einem ternären Gliede DEF und drei angelenkten Gliedern, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$, wird in der Literatur[1]) zur Bestimmung der Geschwindigkeiten[2]) der Punkte D, E und F — wenn die Geschwindigkeiten der drei Punkte A, B und C gegeben sind — zunächst für einen Punkt, z. B. für Punkt F, eine Gerade g — der geometrische Ort aller Geschwindigkeiten von F — ermittelt. Der Schnittpunkt der Parallelen zu $\overline{CF}$ durch den Endpunkt von V_C mit dieser Geraden g liefert dann für F die Geschwindigkeit in der richtigen Größe.

Die Bestimmung der Geraden g (Abb. 1) geschieht so, daß z. B. für den Punkt D eine beliebige Geschwindigkeit V_{D1} angenommen wird. Durch den Endpunkt von V_{D1} werden zu den beiden Dreieckseiten $\overline{DE}$ und $\overline{DF}$ Parallelen gezogen. Der Schnittpunkt der Parallelen zu $\overline{DE}$ mit der Parallelen zu $\overline{BE}$ durch den Endpunkt der Geschwindigkeit von B (V_B) liefert eine Geschwindigkeit V_{E1} und der Schnittpunkt der Parallelen zu $\overline{EF}$ durch V_{E1} mit der Parallelen zu $\overline{DF}$ eine Geschwindigkeit V_{F1} des Punktes F. In gleicher Weise wird für Punkt D eine zweite Geschwindigkeit V_{D2} angenommen und V_{F2} bestimmt usw. Die Endpunkte V_{F1}, V_{F2} usw. liegen auf der Geraden g. Die Geraden, auf denen die Geschwindigkeiten V_D, V_E und V_F liegen, schneiden sich im Pol P. Ebenso schneiden sich z. B. die Strahlen, auf denen V_{D1}, V_{E1} und V_{F1} liegen, in einem Pole P_1. Die Pole der einzelnen Geschwindigkeitsstrahlen des ternären Gliedes liegen auf einer Geraden. Die Polgerade schneidet die Gerade g im Punkte P_0, dem Schnittpunkt der Parallelen durch V_A zu $\overline{AD}$ und durch V_B zu $\overline{BE}$. Liegt der Pol P_0 noch in der Zeichenebene, dann genügt es, für Punkt D z. B. nur eine Geschwindigkeit (z. B. V_{D1}) anzunehmen, um die Richtung von g zu bestimmen, andernfalls müssen mindestens zwei Geschwindigkeiten für Punkt D angenommen werden.

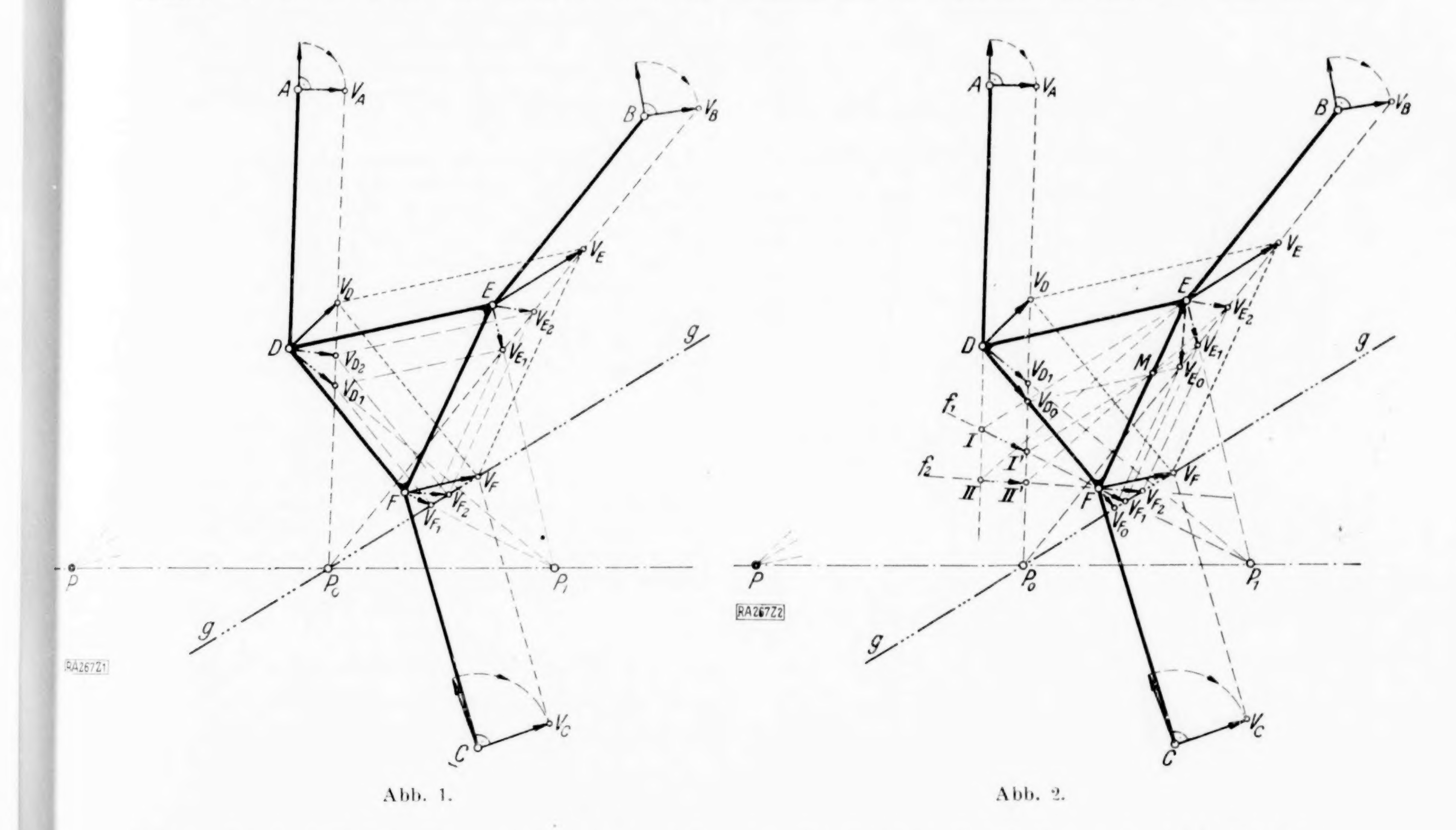


Abb. 1. Abb. 2.

Die Gerade g kann auch auf folgende Weise bestimmt werden (Abb. 2): Man legt durch den Punkt F eine beliebige Gerade f_1 und verlängert z. B. den Lenker $\overline{AD}$ und die dazu Parallele bis zum Schnitt mit f_1. Dies gibt die Punkte I und I'. Punkt I wird jetzt mit Punkt E verbunden und durch I' die Parallele zu $\overline{IE}$ gezogen bis zum Schnitt mit der Parallelen zu $\overline{BE}$, dann wird wieder die Geschwindigkeit V_{E1} gefunden. Die Parallele durch den Endpunkt von V_{E1} zu $\overline{EF}$ gibt wieder V_{F1}, das auf f_1 liegt. Das gleiche kann mit einer beliebigen Geraden f_2 usw. wiederholt werden. (Die an und für sich beliebigen Geraden f_1, f_2 usw. sind hier wegen der dann folgenden Beweisführung so gewählt worden, daß sich die in Abb. 1 schon ermittelten Geschwindigkeiten V_{E1}, V_{E2} usw. ergeben.) Werden als beliebige Gerade die Strecke $\overline{DF}$ und $\overline{DV_{D0}}$ als Geschwindigkeit für D angenommen, dann liegt auf der Verlängerung von $\overline{DF}$ die Geschwindigkeit V_{F0}. Die Parallele durch V_{D0} zu $\overline{DE}$ gibt auf $\overline{EF}$ den Punkt M, durch den auch die Geraden $\overline{I'V_{E1}}$ und $\overline{II'V_{E2}}$ usw. gehen. Wenn also Punkt M bekannt ist, kann man sich das Ziehen der Geraden $\overline{IE}$, $\overline{IIE}$ usw. ersparen, da I', II' usw. sofort mit M verbunden und die Punkte V_{E1}, V_{E2} usw. bestimmt werden können.

Wird schließlich z. B. der Pol P_1 noch mit dem Punkt D verbunden, dann erhält man die Geschwindigkeit V_{D1}, die beim 1. Verfahren angenommen und von der ausgegangen worden war.

Zum Beweis dieser Methode betrachte man die Dreiecke P_1ID, P_1ED und P_1EF in Abb. 2.

[1]) Burmester, L.: Lehrbuch der Kinematik (Leipzig: A. Felix 1888), S. 590 (Abb. 614); s. a. Grübler, M.: Getriebelehre (Berlin: J. Springer 1917), S. 77 (Abb. 116); s. a. Wittenbauer, F.: Graphische Dynamik (Berlin: J. Springer 1923), S. 274 (Abb. 354).

[2]) In den folgenden Ausführungen werden immer nur die um 90° gedrehten Geschwindigkeiten verwendet.

Es verhält sich:

$$\frac{\overline{P_1 I}}{\overline{P_1 I'}} = \frac{\overline{P_1 D}}{\overline{P_1 V_{D1}}} = \frac{\overline{P_1 E}}{\overline{P_1 V_{E1}}} = \frac{\overline{P_1 F}}{\overline{P_1 V_{F1}}}.$$

Damit ist gezeigt, daß hier zur Bestimmung von V_{F1} die in Abb. 1 angenommene Geschwindigkeit V_{D1} nicht mehr gebraucht wird und durch den Strahl $\overline{II'}$ ersetzt werden kann.

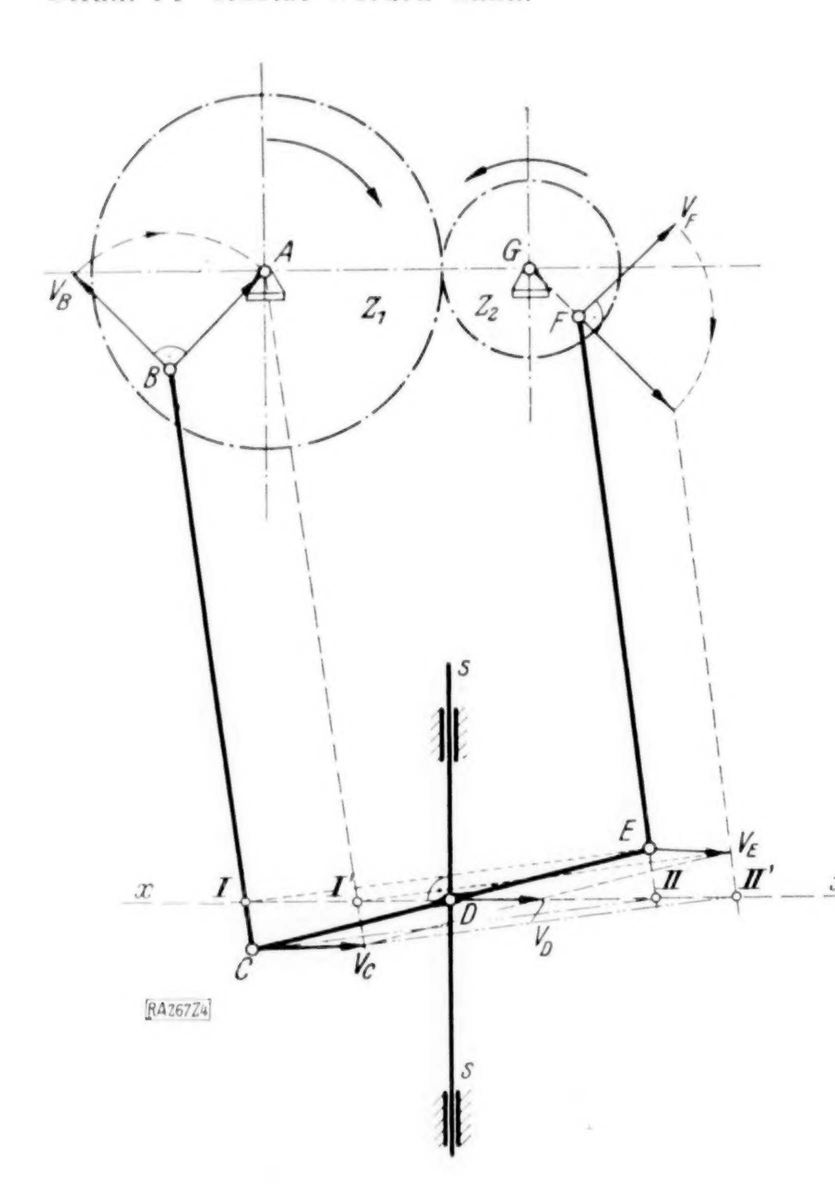


Abb. 3.

keitsrichtungen eines quaternären Gliedes (Abb. 5) bekannt sind. In den beiden letzten Fällen (Abb. 3 bis 5) vereinfacht sich das Verfahren noch insofern, als auf das Einzeichnen der beliebigen Strahlen f_1, f_2 usw. verzichtet werden kann; dadurch erübrigt sich die Bestimmung der Geraden g.

Beim Römergetriebe[3]) (Abb. 3) sind die Geschwindigkeiten V_B des Punktes B und V_F des Punktes F, außerdem die um 90° gedrehte Geschwindigkeitsrichtung — xx — gegeben. Auf der Geraden x wird Punkt I der Stange BC mit Punkt E verbunden und durch I' die Parallele zu $\overline{IE}$ gezogen; der Schnittpunkt mit der Parallelen zu $\overline{EF}$ liefert dann sofort die Geschwindigkeit von E (V_E) in der richtigen Größe. Durch den Endpunkt von V_E die Parallele zu $\overline{CDE}$ gezogen, ergibt dann die Geschwindigkeiten von C — als Schnittpunkt mit der Parallelen zu $\overline{BC}$ — und von D — als Schnittpunkt mit der Geraden x —. Zur Kontrolle kann dasselbe Verfahren mit II und II' wiederholt werden; hierbei ergibt sich sofort die Größe von V_C.

In Abb. 4[4]) sind die Geschwindigkeiten von A und G gegeben; außerdem die um 90° gedrehten Geschwindigkeitsrichtungen von C und E. Gesucht ist die Geschwindigkeit des Punktes D. Punkt I auf $\overline{AB}$ wird mit D verbunden und durch I' die Parallele zu $\overline{ID}$ gezogen; ferner wird Punkt II auf $\overline{FG}$ mit D verbunden und durch II' die Parallele zu $\overline{IID}$ gezogen. Der Schnittpunkt beider Parallelen liefert die Geschwindigkeit von D (V_D).

In Abb. 5 ist eine Kette mit einem quaternären Gliede $CDFE$ gegeben. Die Geschwindigkeiten der Punkte A und G und die um 90° gedrehten Geschwindigkeitsrichtungen der Punkte D und E sind bekannt. Gesucht ist die Geschwindigkeit des Punktes C. Die Punkte I und II auf $\overline{FG}$ werden mit C verbunden und durch I' die Parallele zu $\overline{IC}$ und durch II' die Parallele zu $\overline{IIC}$ gezogen. Der Schnittpunkt beider Parallelen liefert V_C.

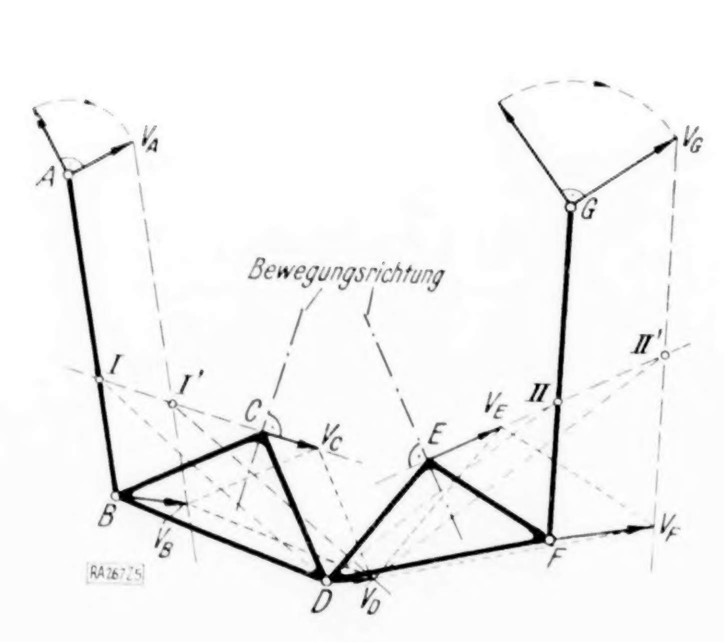


Abb. 4.

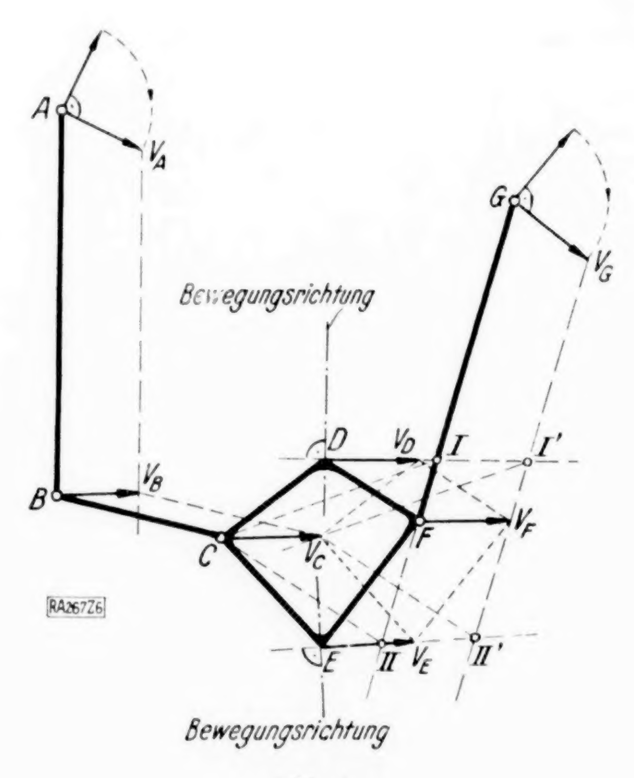


Abb. 5.

Das neue Verfahren erweist sich als vorteilhaft, wenn das ternäre Glied eine Gerade ist, da die Bestimmung der Geraden g einfacher ist als nach dem zuerst angegebenen Verfahren, außerdem, wenn die um 90° gedrehte Geschwindigkeitsrichtung eines Punktes des ternären Gliedes (Abb. 3 und 4) oder zwei um 90° gedrehte Geschwindig-

K. A. Flocke (Dresden). 267

[3]) Burmester, L.: a. a. O., S. 544 (Abb. 561); Beyer, R.: Technische Kinematik (Leipzig: J. A. Barth 1931), S. 270 (Abb. 440).

[4]) Wittenbauer, F.: a. a. O., S. 273 (Abb. 353).

Zur Ermittlung des Beschleunigungspoles der ebenen Systembewegung. Bei der zeichnerischen Darstellung des Beschleunigungszustandes eines eben bewegten starren Systems bedient man sich zweckmäßig des Beschleunigungspoles P, mit dessen Kenntnis aus der gegebenen Beschleunigung eines Systempunktes die Beschleunigungen beliebiger Systempunkte einfach zu konstruieren sind. Für die Ermittlung des Poles P stehen eine Reihe von Konstruktionen zur Verfügung, wobei P im Schnitte von Kreisen oder Geraden gewonnen wird. Da diese Schnitte aber nicht selten schleichend sind oder zu einem auf der Zeichenebene weitab fallenden Pole führen, so wird die im folgenden gezeigte einfache Berechnung der Koordinaten des konstruierten Poles P erwünscht sein, die sich auch konstruktiv verwerten läßt [1]).

Dabei wird der häufig vorliegende Fall vorausgesetzt, daß die Beschleunigungen $\mathfrak{b}_A$, $\mathfrak{b}_B$ zweier Systempunkte $A\,B$ bekannt seien, durch die P eindeutig bestimmt ist. Wird zu $\mathfrak{b}_A = \overrightarrow{A\alpha}$ (Abb. 1)

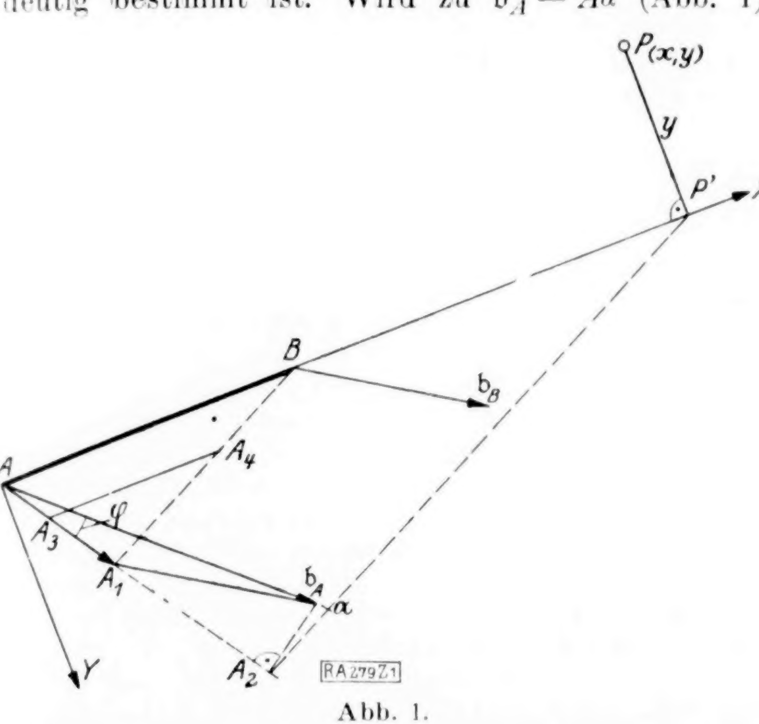


Abb. 1.

die negative Beschleunigung des Punktes B ($-\mathfrak{b}_B = \overrightarrow{\alpha A_1}$) geometrisch hinzugefügt, so gibt der Vektor $\overrightarrow{AA_1} = \mathfrak{b}_{AB}$ die Beschleunigung der relativen Bewegung von A gegen B.

Da bekanntlich

$$b_A = \overline{AP}\cdot k,\quad b_B = \overline{BP}\cdot k,\quad b_{AB} = \overline{AB}\cdot k,$$

so sind die Dreiecke ABP und $AA_1\alpha$ gleichsinnig ähnlich, woraus für die Koordinaten x, y des Poles P in bezug auf das in Abb. 1 eingetragene Achsenkreuz mit dem Ursprunge in A und mit $\overline{AB} = a$ die Gleichungen folgen

$$x = a\,\frac{\overline{AA_2}}{\overline{AA_1}}\,;\qquad -y = a\,\frac{\overline{\alpha A_2}}{\overline{AA_1}}\,.$$

Wird beachtet, daß

$$\overline{AA_2} = b_A\cos\varphi\,,\quad \overline{\alpha A_2} = b_A\sin\varphi\,,\quad \overline{AA_1} = b_{AB}\,,$$

so ergibt sich die einfache Darstellung

$$\frac{x}{a} = \frac{\mathfrak{b}_A\cdot\mathfrak{b}_{AB}}{\mathfrak{b}^2_{AB}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

$$-\frac{y}{a} = \frac{|\,\mathfrak{b}_A\times\mathfrak{b}_{AB}\,|}{\mathfrak{b}^2_{AB}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Bezeichnen b_{AX}, b_{AY} die Komponenten von $\mathfrak{b}_A$, b_{BX}, b_{BY} jene von $\mathfrak{b}_B$ in der X- und Y-Richtung, schließlich $b_X = b_{AX} - b_{BX}$, $b_Y = b_{AY} - b_{BY}$ die Komponenten von $\mathfrak{b}_{AB}$, so führt die Auswertung des inneren und äußeren Produktes in (1) und (2) zu den Formeln

$$\frac{x}{a} = \frac{b_{AX}\,b_X + b_{AY}\,b_Y}{b_X{}^2 + b_Y{}^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

$$\frac{y}{a} = \frac{b_{AY}\,b_X - b_{AX}\,b_Y}{b_X{}^2 + b_Y{}^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

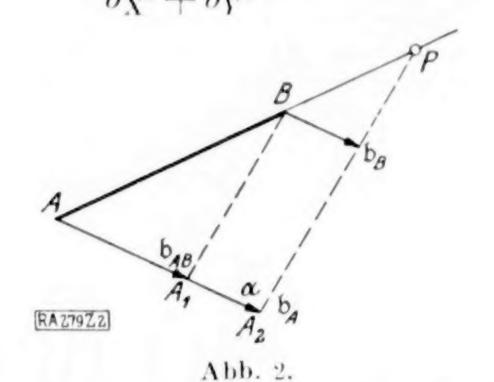


Abb. 2.

Die Koordinaten $x\,y$ lassen sich auch einfach konstruieren. Aus der Beziehung $\dfrac{x}{a} = \dfrac{\overline{AA_2}}{\overline{AA_1}}$ folgt, daß der Punkt P' im Schnitte der durch A_2 gezogenen Parallelen zu A_1B mit der Geraden AB gefunden wird; damit ist die Abszisse $x = AP'$ bestimmt. Macht man $\overline{A_1A_3} = \overline{\alpha A_2}$, zieht $A_3A_4 \parallel AB$ bis zum Schnitte mit A_1B, dann ist $y = \overline{A_3A_4} = \overline{P'P}$.

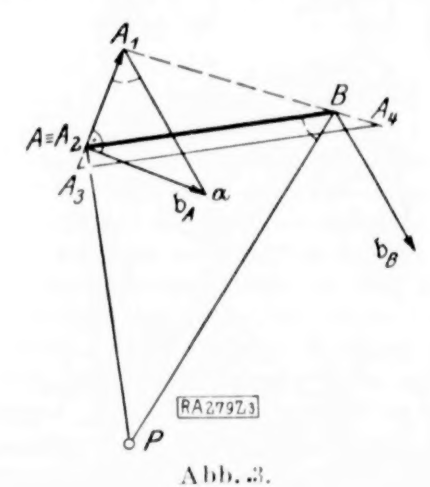


Abb. 3.

Die in den Gl. (1) und (2) gegebene Darstellung der Koordinaten $x\,y$ liefert unmittelbar die Bedingungen für die Sonderfälle, in denen der Beschleunigungspol P auf der X- bzw. Y-Achse liegt. Liegt P auf der X-Achse, d. h. soll y verschwinden, dann muß gemäß (2): $\mathfrak{b}_A \parallel \mathfrak{b}_{AB}$ sein, demnach

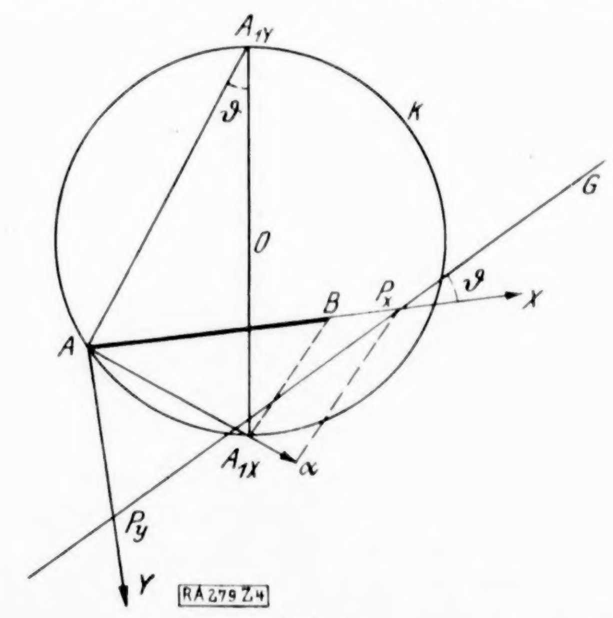


Abb. 4.

ist $\mathfrak{b}_A \parallel \mathfrak{b}_B$. Die oben angegebene Konstruktion für P' gilt dann auch für den Punkt P (Abb. 2).

Liegt P auf der Y-Achse, dann ist zufolge (1) wegen $x = 0$: $\mathfrak{b}_A \perp \mathfrak{b}_{AB}$ (Abb. 3).

[1]) Eine andere rechnerische Bestimmung des Beschleunigungspoles mit Hilfe komplexer Zahlen gab kürzlich O. Heck, Ing.-Arch. 3, (1932), S. 507.

Ist die Beschleunigung des Systempunktes A gegeben ($\mathfrak{b}_A = \overrightarrow{Aa}$) und wird vorgeschrieben, daß der Beschleunigungspol der Bewegung auf einer Geraden G liege (Abb. 4), so kann man nach den zugehörigen Beschleunigungen des Systempunktes B fragen. Jedem als Beschleunigungspol gewählten Punkte von G entspricht nach Abb. 1 ein ganz bestimmter Punkt A_1; der geometrische Ort aller Punkte A_1 für wandernden Punkt P auf G legt daher die Verteilung der möglichen Beschleunigungen von B fest. Man findet leicht, daß dieser Ort ein durch A gelegter Kreis K ist, der jene Punkte A_{1x}, A_{1y} als Endpunkte eines Durchmessers enthält, welche den auf der X- und Y-Achse gelegenen Beschleunigungspolen P_X, P_Y der Geraden G entsprechen. Hierbei ist nach obigem A_{1X} bestimmt durch den Schnitt der durch B zu $P_x a$ gezogenen Parallelen mit Aa. Ferner ist $A A_{1Y} \perp Aa$ und es stimmt der Winkel $A A_{1y} A_{1X}$ überein mit dem Winkel ϑ, den die Gerade G mit der X-Achse einschließt. Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ wird G die Normale durch P_x zu AB; dann rückt A_{1Y} nach A, und es ist K der über AA_{1x} als Durchmesser beschriebene Kreis. Für $\vartheta = 0$ artet der Kreis K in die durch die Punkte AA_{1x} gelegte Gerade aus. Dem mit A zusammenfallenden Punkt A_1 entspricht der unendlich ferne Punkt von G als Beschleunigungspol der in eine Translation ausartenden ebenen Systembewegung.

Karl Federhofer, Graz. 279

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

Dr.-Ing. e. h., Dr. phil. L. **PRANDTL,** o. Prof. an der Universität Göttingen, und Dipl.-Ing. Dr. phil. A. **BETZ,** a. o. Prof. an der Universität Göttingen. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen (angegliedert dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung). IV. Lieferung. Mit 234 Abb. und 127 Zahlentafeln im Text. München u. Berlin 1932, Verlag von R. Oldenbourg. 153 S. Preis geb. 11,80 M.

Nach mehrjähriger Pause ist vor kurzer Zeit die 4. Lieferung der Göttinger Versuchsberichte erschienen. Sie übertrifft an Reichhaltigkeit des Inhalts fast noch die früheren. Bei der allgemeinen Anerkennung, deren sich die Arbeiten der Prandtl-Betzschen Versuchsanstalt in der ganzen Welt erfreuen, erübrigt es sich, irgend etwas über die Qualität der Veröffentlichung zu sagen. Der Inhalt gliedert sich wieder in drei Teile, von denen der erste einige neue Versuchseinrichtungen, namentlich das Luftschraubenlaboratorium, beschreibt, der dritte eine lange Reihe von Versuchsergebnissen bringt, während in einem kurzen Zwischenstück theoretische (inzwischen schon anderweitig ausführlicher erschienene) Bemerkungen zur turbulenten Strömung von Prandtl enthalten sind. Die Versuchsergebnisse betreffen eine Anzahl neuer Profiluntersuchungen, Aufsuchung von Widerstandszahlen, Messungen an vollständigen Flugzeugmodellen und vieles andere.

Jahrbuch für die Gewässerkunde Norddeutschlands. Besondere Mitteilungen. 7. Bd. Nr. 1. Über Geschwindigkeitsformeln. Von W. Soldau. Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin 1931. 30 S. mit 5 Zahlentafeln und 13 Abb. Preis geh. 6,50 M.

Ganz auf der Grundlage der älteren „Hydraulik" werden hier unter dem Namen „Geschwindigkeitsformeln" Gleichungen für das Widerstandsgefälle in Flußläufen (Weser und Ems) auf Grund experimenteller Ermittlungen aufgestellt. Die Formeln haben die Gestalt

$$v = \varkappa\, R^{\varphi}\, J^{\psi},$$

wobei R den sog. hydraulischen Radius, J das Gefälle und v die Geschwindigkeit bezeichnen. Soweit es sich um Strömungen bei gleicher relativer Rauheit der Wände handelt, würde die Ähnlichkeitstheorie fordern, daß $3\varphi - \psi = 1$. Dies ist bei den meisten Formeln zumindest annähernd erfüllt. Im übrigen variieren die angegebenen Zahlenwerte für $\varkappa$, φ und ψ in außerordentlich starker und wenig übersichtlicher Weise.

KEIICHI **HAYASHI,** Prof. a. d. Kaiserl. Kyushu-Universität, Tafeln für die Differenzenrechnung sowie für die Hyperbel-, Besselschen, elliptischen und anderen Funktionen. VI + 66 S. Berlin 1933, Verlag von Julius Springer. Preis kart. 12 M.

Der Verfasser ergänzt die Reihe der von ihm bearbeiteten, zum Teil sehr wertvollen Tafeln durch das vorliegende neue Werk, das vorwiegend zur Erleichterung von Differenzen- und Interpolationsrechnungen bestimmt ist. Es sind angegeben: die Koeffizienten der Entwicklung von Differenzenquotienten nach Differentialquotienten, dann die erforderlichen Beiwerte für Interpolation nach Differenzenquotienten, die wichtigsten Besselschen Funktionen und elliptischen Normalintegrale. Druck und Ausstattung sind wie bei den früheren Veröffentlichungen des Verfassers durchaus zweckmäßig und ansprechend.

Dr. WILHELM **MÜLLER,** o. Prof. für Mechanik an der Dtsch. Techn. Hochschule zu Prag. Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten. Bd. X der Sammlung „Mathematik und ihre Anwendungen". Mit 120 Textfig. Leipzig 1932. Akadem. Verlagsgesellschaft m.b.H. X + 367 S. Preis geb. 22,80 M.

Eine außerordentlich begrüßenswerte Erscheinung ist dies Lehrbuch der Theorie zäher Flüssigkeiten, das erste wieder seit dem heute schon recht veralteten Brillouinschen Werk von 1907. Der Verfasser hat mit großer Gründlichkeit fast alles zusammengestellt, was an Integralen der Navier-Stokesschen Gleichungen bisher aufgefunden wurde. Sowohl in der Entwicklung der Grundlagen wie in der Darstellung der einzelnen nach verschiedenen Seiten ausgreifenden Ergebnisse hat er großes Geschick bewiesen und in zum Teil recht selbständiger Weise den Stoff neu durchgearbeitet und vielfältig ergänzt. Im letzten Kapitel wird auch einiges über die Navier-Stokesschen Gleichungen Hinausgehende zur Turbulenz (Ähnlichkeitstheorie) mitgeteilt. Das Buch gehört neben dem großen Lambschen Werk, das die zähen Flüssigkeiten nur anhangsweise behandelt, in die Hand eines jeden, der heute in der Hydromechanik wissenschaftlich arbeiten will.

D. **HILBERT** u. S. **COHN-VOSSEN,** Anschauliche Geometrie. Bd. 37 der Sammlung „Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften". Berlin 1932, Julius Springer Verlag. VIII + 310 S. mit 330 Abb. Preis 25,80 M.

Ein sehr schönes Buch, das allen an der Geometrie Interessierten große Freude bereiten wird. Es gibt eine Fülle von Ergebnissen wieder, namentlich solche der neueren Forschung aus den verschiedensten Teilgebieten der Geometrie, vor allem aus der Kurven- und Flächenlehre, der Theorie der Polyeder und der Kristallstrukturen, einiges weniges aus der Kinematik und eine Einführung in topologische Fragen. Das Wesen der Methode, die das Buch verfolgt, und auf die mit dem Ausdruck „anschauliche" Geometrie hingewiesen werden soll, besteht in folgendem: Die Ableitung der einzelnen Ergebnisse wird nicht bis zu den herkömmlichen Ausgangspunkten vollständiger, systematischer Darstellungen zurückgeführt, sondern es werden je nach dem Gegenstand, von Fall zu Fall, geeignete plausible Sachverhalte als Ausgangspunkt gewählt. Man kann dies Verfahren als das dem der Axiomatik entgegengesetzte bezeichnen. Sicher kann für viele ein solcher Lehrgang äußerst fruchtbar werden, und er wird manchen zu einem systematischen Studium der betreffenden Fragen anregen. Besonders hervorzuheben ist die große Sorgfalt, mit der die Figuren, die in sehr großer Zahl und guter Ausführung beigegeben sind, entworfen wurden.

HARRY **SCHMIDT**, Prof. an der Gewerbehochschule Köthen, Privatdozent an der Universität Leipzig. Einführung in die Theorie der Wellengleichung. Verlag Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1931. VI + 146 S. 16 Figuren im Text.

Eine Ergänzung zu den Lehrbüchern der klassischen mathematischen Physik, wie sie vielen Physikern, namentlich auch solchen, die an der neuen Entwicklung der Quantenmechanik interessiert sind, willkommen sein wird. Der Verfasser behandelt der Reihe nach die Integrale der klassischen Wellengleichung im ein-, zwei- und dreidimensionalen Kontinuum in gut verständlicher, durch Ausrechnungen und Abbildungen unterstützter Lehrweise und bespricht in einem kurzen Schlußabschnitt auch die Schrödingersche Gleichung und ihre Lösung für den Fall des Wasserstoffatoms.

Dr. WILHELM **SPANNHAKE**, Professor an der Technisch. Hochschule Karlsruhe. Kreiselräder als Pumpen und Turbinen. Erster Band: Grundlagen und Grundzüge. Mit 182 Textabbildungen. Verlag Julius Springer, Berlin 1931. VIII + 320 S. Preis 29 M.

Nach einer ausführlichen Einleitung, die eine vorzügliche Darstellung der Grundbegriffe der technischen Hydromechanik bringt, bespricht der Verfasser die vollbeaufschlagten Kreiselräder im geschlossenen und offenen Strom sowie die moderne Freistrahlturbine. Er geht jedesmal aus von anschaulichen Beschreibungen der betreffenden technischen Anordnungen und Ausführungsformen und findet dann einen angemessenen Ausgleich zwischen den elementaren Betrachtungsweisen, wie sie in der Technik üblich sind, und einer vertieften hydrodynamischen Auffassung der Strömungsvorgänge. Gerade diese Verbindung der Ergebnisse erstens der sog. eindimensionalen Theorie, zweitens der Ähnlichkeits- und Modellbetrachtungen und drittens der auf die hydrodynamischen Differentialgleichungen gegründeten Strömungsuntersuchung ist das Charakteristische des Buches und bestimmt auch seinen Wert für die weitere Entwicklung, der nicht unterschätzt werden darf. Es ist zu hoffen, daß der in Aussicht gestellte zweite Band auch dem Praktiker zeigen wird, wieviel auf dem eingeschlagenen Wege einer wirklich fortschrittlichen Theorie gewonnen werden kann.

Mises.

Stud.-Ass. HANS **KELLERER**, Mathematische Methoden in der Eisenbahnstatistik. (Dissertation.) 123 S. Altötting, Obb., Verlag Gg. Kellerer. Preis 4 M.

Die aus dem Seminar für Wirtschaftsmathematik an der Technischen Hochschule in Berlin auf Anregung von Professor Timpe entstandene Dissertation ist ein sehr wertvoller Beitrag zu dem Gebiete der angewandten Mathematik, für das sich in der neuesten Zeit an verschiedenen Stellen des In- und Auslandes wachsendes Interesse zeigt: Mathematische Methoden in der Behandlung von Wirtschaftsfragen. Auf Probleme der Massenfabrikation sind vor einigen Jahren schon mathematisch statistische Verfahren in Veröffentlichungen benutzt worden, die aus der Berliner Technischen Hochschule hervorgegangen sind. Kellerer hat wohl als Erster in Deutschland das ungeheure statistische Material der Reichsbahn mathematisch-statistisch korrekt bearbeitet. Nachdem er im ersten Abschnitt Eisenbahn- und mathematisch-statistische Grundbegriffe insbesondere Korrelationen in der Eisenbahnstatistik zum Beispiel zwischen Güterversand und Fahrkarten behandelt, wendet sich der zweite Abschnitt den Stichprobenerhebungen zu. Hierbei wird zunächst die Auszählung durch die Schalterdruckapparate erläutert und die sich daraus ergebenden statistischen Probleme entwickelt, zum Beispiel: „Wann genügt es von mehreren Schalterdruckern nur einen stichprobenweise auszuzählen?" Oder: „Wie kann durch Stichproben die durchschnittliche Platzausnutzung festgestellt werden?" Verfasser macht mehrere Vorschläge, die in der Praxis zu prüfen wären. Von besonderem Interesse erscheint in diesem Abschnitt ein Hinweis auf die in Rußland in neuerer Zeit übliche Methode der Eisenbahnstatistik, von der auch der dritte Abschnitt „Konzentration im Eisenbahnwesen" handelt. Seine Ansicht, daß in Rußland wegen der agrarischen Struktur des Landes die Vorbedingungen für das betreffende Verfahren günstiger sind als in Deutschland, teile ich; mit dem Verfasser möchte ich es aber auch begrüßen, wenn diese Verfahren in der Güterverkehrsstatistik einmal ausprobiert würden. Der letzte Abschnitt behandelt die Methoden der empirisch-statistischen Konjunkturforschung in der Eisenbahnstatistik. Als Hauptziel seiner Arbeit bezeichnet der Verfasser:

1. den Eisenbahnstatistikern zu zeigen, daß neben dem maschinellen Verfahren auch mathematische Methoden gut anwendbar, ja teilweise unentbehrlich sind;

2. den mathematisch geschulten Statistikern zu zeigen, welch ein aussichtsreiches, neues Anwendungsgebiet ihre Methoden hier, wie überhaupt auf dem Gebiet der Wirtschaftsmathematik, finden können.

Dieses Hauptziel hat der Verfasser sehr gut erreicht und damit für die Eisenbahnstatistik ein Arbeitsgebiet eröffnet, wie es für die Fernsprechstatistik schon vor einigen Jahren Rückle und F. Pollaczek getan haben, deren Arbeiten dem Verfasser vielleicht unbekannt geblieben sind.

Anmerkung bei der Korrektur: Eine mir gleichzeitig mit der Korrekturfahne durch Herrn Willers (Freiberg) zugegangene „Niederschrift über die Sitzung des Ausschusses für wissenschaftliche Betriebsuntersuchungen" im Deutschen Braunkohlenindustrieverein berichtet u. a. über einen Vortrag des Bergdirektors D. Wolf: „Die statistische Methode als Hilfsmittel der Betriebsuntersuchung in Reparaturwerkstätten."

Leipzig. W. Lorey. 333

WILHELM **STIEDA**, Johann Albrecht Euler in seinen Briefen 1766—1790. Ein Beitrag zur Geschichte der Kais. Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg. Leipzig 1932, Verlag S. Hirzel. 43 S. Preis geh. 1,60 M.

Wenn dieser Beitrag zur Geschichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg, verfaßt von dem Leipziger Nationalökonomen Wilhelm Stieda, auch nichts eigentlich Mathematisches bringt, so erscheint eine Anzeige in dieser Zeitschrift doch angebracht, weil der älteste Sohn Leonhard Eulers Johann Albrecht Euler, vielfach allerdings in starker Abhängigkeit von seinem Vater, neben astronomischen und meteorologischen Arbeiten auch einige aus dem Interessenkreise dieser Zeitschrift veröffentlicht hat, wie sich aus dem von Stäckel sehr sorgfältig zusammengestellten Verzeichnis aller seiner Arbeiten ergibt. (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 55. Jahrgang 1910.) Stäckel hat auch das etwas ungünstige Urteil Jacobis über Johann Albrecht Euler berichtigt, und das tut erfreulicherweise auch Stieda, der Johann Albrecht als „eine anziehende Persönlichkeit schildert, als einen Hort des Deutschtums im Auslande unter erschwerenden Umständen“.

Leipzig. W. Lorey. 333

Dr. CLEMENS **SCHAEFER**, o. ö. Prof. der Physik a. d. Universität Breslau, Einführung in die theoretische Physik in drei Bänden. 3. Bd., 1. Teil: Elektrodynamik und Optik. VIII + 918 S. m. 235 Fig. im Text. Berlin u. Leipzig 1932, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 40 M.

Unter den verschiedenen neueren Büchern, die in der letzten Zeit sowohl über das Gesamtgebiet als auch über Spezialgebiete der klassischen theoretischen Physik erschienen sind, wird auch dieser neue Band der bekannten und bei Studierenden besonders beliebten Schäferschen Lehrbücher seinen Platz behaupten, ebenso wie die bereits früher in mehreren Auflagen erschienenen Bände. Es ist das Werk eines Physikers, der die große Fülle sowohl der experimentellen Tatsachen, als auch der theoretischen Folgerungen und Erklärungen nach allen Richtungen beherrscht. Weniger Wert ist auf Eleganz der Rechenmethoden gelegt; es könnte an manchen Stellen, z. B. in der Kristalloptik, die Rechnung abgekürzt werden, wenn man sie durch eine unmittelbare begriffliche Deutung der vektoriellen Beziehungen ersetzt. Der Inhalt umfaßt das Gesamtgebiet der Elektro- und Magnetostatik, der Elektrodynamik und der elektromagnetischen Wellen, sowie einen kürzeren Abriß der Elektronentheorie, Theorie der Strahlung und der Relativitätstheorie.

Breslau. F. Noether. 341

Dr.-Ing. H. **GRÖBER**, o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, und Dr.-Ing. S. **ERK**, Reg.-Rat, Mitglied d. Phys.-Techn. Reichsanstalt Berlin, Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. Zugleich 2., völlig neubearb. Aufl. des Buches: H. Gröber, Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges. XI + 259 S. m. 113 Textabb. Berlin 1933, Julius Springer Verlag. Preis geb. 22,50 M.

Das vorliegende Buch ist vorwiegend für Ingenieure bestimmt, die die theoretischen Hilfsmittel dieses weiten Gebiets kennen lernen oder für spezielle Aufgaben unmittelbar übernehmen sollen. Die eigentlichen physikalischen Grundlagen treten daher, außer in einigen Tabellen von Stoffwerten am Ende des Buches, sehr zurück. Das Buch zerfällt in 3, in ihrem Charakter verschiedenartige Teile, von denen der erste von dem erstgenannten, die beiden anderen von dem zweiten Verfasser herrühren. Der erste Teil behandelt die mathematischen Methoden der Wärmeleitung in festen Körpern, wie sie sich im Anschluß an Fouriers Arbeiten allmählich entwickelt haben. Der zweite Teil enthält wohl erstmalig in Lehrbuchform die neueren Untersuchungen über Wärmeübergang in strömenden Flüssigkeiten, verbunden mit einem kurzen Abriß der Hydrodynamik. Der kurze dritte Teil, der die Wärmestrahlung behandelt, hat fast nur referierenden Charakter. Die gewählte Form, die z. B. auch das Plancksche Strahlungsgesetz wie ein nur empirisches darstellt, dürfte auch für Ingenieure noch nicht vollbefriedigend sein. Aber im Ganzen wird das Buch eine willkommene Ergänzung zu den schon vorhandenen, aber anders gerichteten Übersichten über dieses Gebiet werden.

Breslau. F. Noether. 341

Dr.-Ing. RUTHARD **GERMAR**, Die Getriebe für Normdrehzahlen. Neue Rechnungswege und Hilfstafeln für den Konstrukteur. Mit einem Vorwort von Prof. Dr.-Ing. G. SCHLESINGER, Berlin. Berlin 1932, Julius Springer Verlag. 62 S. m. 32 Textabb. und 31 Tafeln. Preis kart. 9,60 M.

„Die vorliegende Arbeit ist aus dem Gedanken der Drehzahlnormung herausgewachsen, den ich im AWF-Heft 239 „Wesen und Auswirkung der Drehzahlnormung“ ausführlich dargelegt habe“, schreibt Schlesinger in dem beigefügten Vorwort. Sie stellt „einen Ausschnitt aus diesem großen Normungsplan“ dar und gilt „als Versuch, die erste Einwirkung dieses Planes auf ein wichtiges Teilgebiet zu zeigen und gedanklich zu umreißen“. Der Zweck der Arbeit ist, die „Anordnung, den Aufbau und die Nutzanwendung“ des dezimalgeometrischen Stufungsgesetzes für die Getriebe der Drehbewegung von Werkzeugmaschinen darzulegen. In drei Hauptabschnitten werden die einfachen zweiachsigen Getriebe (I), die drei- und mehrachsigen durch Hintereinanderschaltung entstandenen Getriebe (II) und die gekoppelten Getriebe (III) behandelt. Der I. Teil befaßt sich ausführlich mit dem Schieberadgetriebe, wobei u. a. die Getriebe mit geringster achsialer Breite angegeben werden. Weiterhin sind für Stufenscheibendurchmesser Berechnungsmöglichkeiten mit Tabellen und außerdem Normungsvorschläge aufgestellt worden. Die Berechnung von Zähnezahlen bei gegebener Zähnezahlsumme und mehreren Übersetzungsverhältnissen kann entweder an Hand einer zu diesem Zwecke entworfenen Rechentafel oder mit Hilfe einer Tabelle ausgeführt werden. Die Zusammenfassung der einfachen Getriebe durch Hintereinanderschaltung zu mehrachsigen Getrieben für große Drehzahlreihen wird im II. Teil an Hand eines „Aufbaunetzes“ und eines „Drehzahlbildes“ ausführlich behandelt. Das Aufbaunetz und das Drehzahlbild haben die Aufgabe, einen Überblick und eine unmittelbare Beurteilung der Drehzahlverhältnisse eines Getriebes zu ermöglichen. Die „doppelt gebundenen“ Getriebe, bei denen zwei Räder der mittleren Welle mit je zwei Rädern der beiden äußeren Wellen kämmen, sind eingehender besprochen. Für die Drehzahlnormung gibt es hierbei nur eine verhältnismäßig geringe Anzahl praktisch brauchbarer Getriebe. Die hier überhaupt möglichen Getriebe sind maßstäblich aufgezeichnet worden. Im III. Teil werden die Vorgelegegetriebe, die Getriebe der „Windungsform“ und die der „Ruppertform“ und die mehr-

achsigen gekoppelten Getriebe untersucht. Auch hier sind die praktisch in Betracht kommenden Getriebe angegeben und erörtert worden.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß vom Verfasser die Aufgabe, die er sich gestellt hat, gelöst worden ist. Dem Konstrukteur kann dieses Buch empfohlen werden, und es wird ihm stets gute Dienste leisten. Die guten Abbildungen tragen sehr zum Verständnis des Buches bei.

Dresden. K. A. Flocke 329

H. **KREY** †, Prof. Dr.-Ing. e. h., Oberregierungs- und Baurat, Erddruck, Erdwiderstand und Tragfähigkeit des Baugrundes. Gesichtspunkte für die Berechnung. Praktische Beispiele und 118 Erddrucktabellen. 4. durchgearbeitete und erweiterte Aufl. von J. EHRENBERG, Regierungs- und Baurat, Berlin. Berlin 1932, Wilh. Ernst & Sohn. 345 S. m. 239 Abb. Preis geb. 26 M.

Das Kreysche Standardwerk, das bekanntlich aus einer kurzen Abhandlung entstanden ist, wurde jetzt, nach dem Tode des Verfassers, durch seinen Mitarbeiter Ehrenberg ergänzt und herausgegeben.

Da die früheren Auflagen des Werkes in dieser Zeitschrift nicht besprochen wurden, so mag zunächst der allgemeine Charakter und Aufbau des Werkes (die in der 4. Auflage gegenüber der 3. keine Änderung erfuhren) kurz gewürdigt werden. Das Kreysche Buch stellt sich bewußt auf den Standpunkt des praktischen Ingenieurs und stellt daher zunächst die physikalischen Grundanschauungen des Gebietes in der für die große Mannigfaltigkeit der bautechnischen Probleme erforderlichen Allgemeinheit dar, ohne auf die tieferen mineralogischen, physikalischen und kolloidchemischen Grundlagen dieser Anschauungen näher einzugehen. Die erwähnten Grundanschauungen werden in dem umfangreichen Abschnitt I dargelegt, und dabei werden auch die vielumstrittenen Widersprüche zwischen den verschiedenen älteren Erddrucktheorien einwandfrei aufgeklärt und insbesondere die Rolle der Rankineschen Theorie als Sonder- bzw. Grenzfall einer allgemeineren Anschauung schön beleuchtet. Auch die Begriffe des passiven und aktiven Erddrucks werden — in erfreulichem Gegensatz zu dem größten Teil des umfangreichen Schrifttums dieses Gegenstandes — klar als Grenzwerte erklärt. — Die folgenden 6 Abschnitte enthalten die Berechnungsmethoden im einzelnen für eine sehr große Fülle erd- und grundbaumechanischer Probleme, wobei außer den bekannten klassischen Aufgaben auch schwierige Fragen, wie z. B. die Berechnung von Pfahlgründungen, Spundwänden, in Dämmen eingebetteten Gewölbe Berücksichtigung finden. Der VIII. Abschnitt bietet die unmittelbare experimentelle Bestätigung einiger rechnerisch gewonnener Erkenntnisse und zeichnet sich (ebenso wie Abschnitt I) durch hervorragende Lichtbilder neuer Laboratoriumsversuche aus. Abschnitt IX und X bilden gleichsam einen Anhang und bieten ein Literaturverzeichnis und umfangreiche Erddrucktabellen.

Das Kreysche Werk hat auch neben dem grundlegenden Buch von Terzaghi seine Geltung behauptet und wird es zweifellos auch in Zukunft tun. Die Erkenntnis, daß die engen klassischen Annahmen — so insbesondere die Annahme eines kohäsionslosen Bodens — für die Lösung zahlreicher wichtiger Aufgaben nicht zulässig sind, ist in dem Kreyschen Werk in vollem Umfange berücksichtigt; diese Erkenntnis hat auch schon in den älteren Auflagen des Kreyschen Werkes nicht ganz gefehlt. Während aber das Schwergewicht des Terzaghischen Werkes gerade auf einer tieferen experimentalphysikalischen Begründung der erweiterten Grundanschauungen liegt, legt das Werk von Krey das größte Gewicht auf die Anwendung dieser Grundanschauungen und damit auf die Lösung einer möglichst großen Anzahl bautechnischer Probleme auf Grund physikalisch wohlerwogener Annahmen mit Hilfe hauptsächlich graphischer und tabellarischer Methoden. Die beiden Werke ergänzen sich somit auf das glücklichste, wobei noch besonders die meisterhafte Einfachheit und Anschaulichkeit der Kreyschen Darstellung hervorgehoben werden mag.

Die neue Auflage ist hauptsächlich im Hinblick auf die Einzelprobleme erweitert, wobei besonders die schöne Darstellung der Behandlung erdstatischer Aufgaben mit gekrümmten Gleitflächen hervorgehoben werden soll. Sehr wertvoll — wenn auch im einzelnen weniger geglückt — ist auch die neu hinzugekommene Erörterung der Wirkung des Grundwassers auf das Gleichgewicht von Baugrubensohlen und Böschungen. Das Literaturverzeichnis wurde in der vorliegenden Neuauflage ganz erheblich erweitert und gegliedert; erweitert wurden auch die Erddrucktabellen.

So wird das Kreysche Meisterwerk auch in seiner neuen Auflage seine Aufgabe, dem Bauingenieur die nötigen Anhaltspunkte und die erwünschten Anregungen für die selbständige Beherrschung auch schwieriger erdstatischer Aufgaben zu geben, in vollem Maße erfüllen.

Berlin. P. Neményi. 347

Dott.-Ing. EUGENIO **CAMPINI**, Construzioni Idrauliche e Idraulica Tecnica. Basi scientifiche — Applicazioni tecniche — Studi speciali. XIV + 710 S. mit ca. 300 Abb. Milano 1933, Ulrico Hoepli.

Das Buch trägt den Untertitel: Basi scientifiche, applicazioni tecniche, studi speciali (wissenschaftliche Grundlagen, technische Anwendungen, Sonderstudien). Beide Titel lassen ein zusammenfassendes Werk über Wasserbau und dessen wissenschaftliche Grundlagen vermuten. Diese Erwartung wird durch die Benutzung des Werkes gründlich getäuscht, denn es stellt lediglich eine lose und recht willkürliche Aneinanderreihung von hydraulischen, meteorologischen und festigkeitstechnischen Aufsätzen, von Baubeschreibungen, behördlichen Bestimmungen, Industriestatistiken, Gutachten, Beschreibungen und Statistiken über Talsperrenunfälle dar, zum Teil von Campini, z. T. von anderen Autoren verfaßt und fast durchweg schon anderwärts veröffentlicht; sie werden lediglich durch den einzigen Gesichtspunkt zusammengehalten, daß sie alle an die Interessen der Wasserbauingenieure appellieren möchten. — Auch durch die Unterteilung in 3 Buchteile (I. Statik der Eingewölbetalsperren, II. Statik der Druckrohrleitungen, III. Hochwasserwellen und Staukurven in hydraulischen Netzen) wird die Übersichtlichkeit kaum wesentlich erhöht, denn in allen Teilen, ganz besonders in Buchteil III, findet man Aufsätze, die nichts oder wenig mit dem im Titel angegebenen Gegenstand zu tun haben.

Nicht besser als mit dem allgemeinen Aufbau ist es mit dem Inhalt bestellt. Die rein technischen Einzelheiten mögen hier und da anregend sein, wenn sie auch meist nichts wesentlich Neues bieten; die auf die wissenschaftlichen Grundlagen bezüglichen Aufsätze dagegen sind zum großen Teil schon bei Erscheinen des Buches gänzlich überholt. Von den statischen Aufsätzen trifft dieser Vorwurf ganz besonders die „Näherungstheorie“

der Eingewölbe-Talsperre, die (wie der Referent in dem Zentralblatt der Bauverwaltung eingehend gezeigt hat) solche vereinfachende Annahmen aufweist, die schon vor Jahren, z. Zt. des Erscheinens der Arbeit in Zeitschriften, nicht zu rechtfertigen waren; heute, nach den Arbeiten von Vogt und Westergaard, ist die ganze Theorie von Campini völlig überholt; sie liefert bestenfalls grobe Abschätzungen, in sehr vielen Fällen versagt sie aber völlig. — Ähnlich unzureichend und unzeitgemäß ist auch die Statik der Druckrohrleitungen behandelt, wenigstens so weit räumliche Aufgaben in Frage kommen. — Von den hydrodynamischen Aufsätzen müssen ganz besonders die modellwissenschaftlichen Betrachtungen als oberflächlich, z. T. sogar irreführend, abgelehnt werden. Die umfangreichen hydraulischen Abhandlungen, die im Buch enthalten sind, mögen im übrigen manche brauchbare Betrachtungen enthalten, die aber im Wust des zusammengetragenen Materials schwer aufzufinden sind.

Ganz ähnliches gilt auch für das Bildmaterial, das durch seine Menge und Vielseitigkeit — wir finden sogar das neuerdings freigelegte Schiff von Caligula abgebildet — imponieren möchte, aber z. T. eher verwirrend wirkt. — Abzulehnen ist die Abb. 292, da sie eine abwegige Vorstellung von der sog. Deckwalze bei dem Wassersprung zu erwecken geeignet ist.

Berlin. P. Neményi. 347

Dr. phil. W. **FELGENTRAEGER,** Oberreg.-Rat a. D. Feine Waagen, Wägungen und Gewichte. 2., verm. u. umgearb. Aufl. von „Theorie, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwaage". Berlin 1932, Verlag Julius Springer. VI + 308 S. m. 117 Textabb. Preis geb. 26 M.

Das Werk stellt die zweite, sehr vergrößerte und gründlich umgearbeitete Auflage des vom Verfasser vor 25 Jahren herausgegebenen Buches „Theorie, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwaage" dar. An der mathematischen Theorie hat sich allerdings verhältnismäßig wenig geändert; auf deduktivem Wege werden die Statik und die Dynamik der Waage behandelt. Sehr ausführlich werden die Einzelteile der Waage beschrieben und diskutiert. Den Praktiker dürften insbesondere vergleichende Betrachtungen wie solche über die Vor- und Nachteile verschiedener Balkenformen interessieren. Die Kapitel über die Schneiden sind nicht nur an und für sich recht lesenswert, sondern sie zeigen auch dem Theoretiker, wo die gewöhnliche Theorie der Waage vervollständigt werden muß, z. B. bei der Berücksichtigung der Schneidenabrundung. Weiterhin erfahren wir alles Wissenswerte über Ablesevorrichtungen, Dämpfungseinrichtungen, Arretierungen, Einrichtungen zum Ausgleich kleiner Massenunterschiede und über das Gehäuse. Es ist eine große Anzahl von Waagen beschrieben mit über hundert meist vortrefflichen Abbildungen. Das Charakteristische an den verschiedenen Typen hat der Verfasser besonders fein herausgearbeitet. Der Abschnitt über die Wägungen enthält die Aufstellung, Justierung, Bestimmung der Fehler und Konstanten der Waage und deren summarische Prüfung, ferner die verschiedenen Wägungsmethoden. Abschließend sind die Gewichte und deren Handhabung beschrieben; die Darstellung legt ein Beweis dafür ab, daß der Verfasser als hervorragender Praktiker in der Lage war, diesen an und für sich spröden Stoff sehr geschickt zu behandeln. Beigefügt sind die wichtigsten Reduktionstafeln für die praktischen Wägungen. Im ganzen dürfte die Lektüre des Buches jedem nicht zu speziell orientierten Physiker einen umfassenden wertvollen Einblick in die darin behandelte Materie vermitteln.

Potsdam. H. Schmehl. 352.

H. **KAYSER,** Prof. d. Physik a. d. Univ. Bonn, und H. **KONEN,** Prof. d. Physik a. d. Univ. Bonn. Handbuch der Spectroscopie. 8. Bd., 1. Lieferg. Leipzig 1932, S. Hirzel Verlag. IV + 654 S.

Das starke Anschwellen der spezielle spectroskopische Daten enthaltenden Literatur verstärkt das Bedürfnis nach einem „Nachschlagewerk, das in handlicher Weise die erdrückende Fülle der Einzelergebnisse sichert, ordnet und die Literatur zusammenfaßt". Es ist daher sehr zu begrüßen, daß in der hier vorliegenden Lieferung, wieder mit den Elementen beginnend, deren chemisches Symbol mit den Buchstaben A bis C anfängt, die Literatur-Zusammenstellung und -Bearbeitung bis Anfang 1932 in altgewohnter zuverlässiger und übersichtlicher Weise fortgeführt wird.

Berlin. Cl. v. Simson. 335

Tafel der Viertel-Quadrate aller Zahlen von 1 bis 20 009 zur Erleichterung des Multiplizierens vierstelliger Zahlen. Mit vielen Ratschlägen für das praktische Rechnen in Handel, Gewerbe und Wissenschaft. Zusammengestellt von Prof. Dr. J. PLASSMANN. 26 + 200 Seiten. Leipzig 1933. Dr. Max Jänecke Verlagsbuchhandlung. Preis 6,40 M.

Gemäß der Formel $\frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2 = ab$ kann die Multiplikation zweier Zahlen mittels einer Tafel der Viertelquadrate erledigt werden. Mittels der vorliegenden Tafel können Produkte beliebiger vierstelliger Zahlen gebildet werden, wobei allerdings einige Additionen durchzuführen sind; dafür aber hat man den Vorteil, mit einem kleinen handlichen Büchlein durchzukommen, während die direkten Multiplikationstafeln z. B. von Crelle oder Peters die Multiplikation nur dreistelliger Zahlen leisten und dabei einen sehr unangenehmen Umfang aufweisen.

Berlin. H. Pollaczek-Geiringer. 343

Technische Übungsaufgaben für darstellende Geometrie, hrsg. v. Dr. ERWIN **KRUPPA,** o. ö. Prof. a. d. Techn. Hochsch. in Wien. 2. Mappe. Leipzig u. Wien 1933. Franz Deuticke Verlag. Preis 2 M, jedes einzelne Blatt —,20 M.

Die ausgezeichneten Übungsaufgaben für darstellende Geometrie, deren zweites Heft nun vorliegt, zeigen die Eigenschaften, die die „Wiener Schule" in dieser Hinsicht charakterisiert: Theoretisches Verständnis, fußend auf allseitiger geometrischer Ausbildung, vereint mit technisch-praktischem Können.

Berlin. H. Pollaczek-Geiringer. 355

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten);

Dr.-Ing. K. **THALAU,** a. o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, Leiter d. Stat. Abt. der Deutsch. Versuchsanstalt f. Luftfahrt, u. Dr.-Ing. A. **TEICHMANN,** Assistent in der Stat. Abt. der Deutsch. Versuchsanstalt f. Luftfahrt. Aufgaben aus der Flugzeugstatik. Hrsg. im Auftrage der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof. XI + 345 S. m. 90 Einzelaufgaben, 106 Tabellen und 291 Textabbildungen. Berlin 1933, Julius Springer Verlag. Preis geb. 28 M.

Dr.-Ing. W. **KUNTZE**, Ständ. Mitglied u. Prof. im Staatlichen Materialprüfungsamt zu Berlin-Dahlem. Kohäsionsfestigkeit. 62 S. m. 77 Abb. Berlin 1932. Julius Springer. Preis kart. 11 M.

ERNST **BARTHEL**, Einführung in die Polargeometrie. 2., wesentl. verb., erg. u. umgearb. Aufl. der „Polargeometrie". X + 179 S. m. 30 Fig., einer Tafel u. einem Bildnis. Leipzig 1932. Univers.-Verlag von Rob. Noske. Preis kart. 7 M.

PIERRE DE **FERMAT**, Bemerkungen zu Diophant. Aus dem Lateinischen übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von Max MILLER. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Bd. 234. 49 S. Leipzig 1932. Akadem. Verlagsges. m. b. H. Preis kart. 3 20 M.

Handbuch der Experimentalphysik. Hrsg. v. W. WIEN † und F. HARMS, unter Mitarbeit von H. LENZ. Bd. 4: Hydro- und Aerodynamik. 4. Teil: Rohre — Offene Gerinne — Zähigkeit. Hrsg. v. Ludwig SCHILLER. bearb. v. L. SCHILLER. F. EISNER. S. ERK. VIII + 719 S. m. 392 Abb. Leipzig 1932, Akadem. Verlagsgesellschaft m. b. H. Preis brosch. 65 M. geb. 67 M.

Dr. ERNST **FANTA**, a. o. Prof. a. d. Techn. Hochschule in Wien. Die Betriebsgrundlagen der Lebensversicherung. Eine gemeinverständliche Darstellung ihrer Technik. 7. Heft von „Betriebswirtschaft". Eine Schriftenreihe, hrsg. v. Jul. Ziegler. Wien. 144 S. 1932. Carl Heymanns Verlag. Berlin, Österreichischer Wirtschaftsverlag, Komm.-Ges. Payer & Co., Wien.

OSCAR v. **MILLER**, Erinnerungen an die Internationale Elektrizitäts-Ausstellung im Glaspalast zu München im Jahre 1882. Deutsches Museum. Abhandlungen und Berichte. 4. Jg. 6. H. Berlin 1932, VDI-Verlag. S. 153—181 m. Abb. Preis —.90 M.

Bulletin Geotechnical Committee Government Railways of Japan. No. 2. Okt. 1932. Published by the Research Office. Government Railways of Japan. 438 S. japan. + 14 S. engl. Anmerkungen und Zusammenfassung. Mit Abb. im Text.

DER CHEMIE-INGENIEUR. Ein Handbuch der physikalischen Arbeitsmethoden in chemischen und verwandten Industriebetrieben. Hrsg. v. A. EUCKEN und M. JAKOB. mit einem Geleitwort von F. Haber. Bd. I: **Physikalische Arbeitsprozesse des Betriebes.** 1. Teil: Hydrodynamische Materialbewegung. Wärmeschutz und Wärmeaustausch. Hrsg. v. M. Jakob; bearb. von M. JAKOB. Berlin, und S. ERK. Berlin. XIX + 539 S. m. 287 Fig. im Text. Leipzig 1933. Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. Preis geb. 54 M.

V. **BJERKNES**, Prof. a. d. Univ. Oslo, Research Associate des Carnegie Institutes in Washington. J. **BJERKNES**, Prof. am Geophys. Institut Bergen. H. **SOLBERG**, Prof. a. d. Univ. Oslo, T. **BERGERON**, wissenschaftl. Berater im norweg. Wetterdienst. Physikalische Hydrodynamik mit Anwendung auf die dynamische Meteorologie. XVII + 797 S. m. 151 Abb. Berlin 1933 Julius Springer Verlag. Preis geb. 69 M.

Dr. V. **BJERKNES**, Prof. an der Universität Oslo. C. A. Bjerknes, sein Leben und seine Arbeit. Aus dem Norwegischen ins Deutsche übertragen von Else WEGENER-KÖPPEN. IV + 218 S. mit 31 Abb. u. einem Bildnis. Berlin 1933, Julius Springer Verlag. Preis geb. 9,80 M.

Dr. LUDWIG **BIEBERBACH**, o. Prof. an der Univ. Berlin, Mitglied d. Preuß. Akad. d. Wissenschaften. Differentialgeometrie. (Teubners math. Leitf. Bd. 31.) VI + 142 S. m. 8 Fig. i. Text. Leipzig und Berlin 1932, B. G. Teubner Verlag. Preis kart. 6 M.

Dr. PASCUAL **JORDAN**, Prof. a. d. Univ. Rostock, Statistische Mechanik auf quantentheoretischer Grundlage. Bd. 87 d. Sammlg. „Die Wissenschaft", hrsg. v. W. Westphal. X + 110 S. Braunschweig 1933. Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges. Preis geh. 6,80 M, geb. 8 20 M.

Dr. RUDOLF **ROTHE**, o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin. Höhere Mathematik für Mathematiker. Physiker und Ingenieure. Teil I: Differentialrechnung und Grundformeln der Integralgleichung nebst Anwendungen. 4. verb. Aufl. (Teubners Mathem. Leitfäden. Bd. 21.) VIII + 201 S. m. 161 Fig. im Text. Leipzig u. Berlin 1932. B. G. Teubner. Preis kart. 5,40 M.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. d. Preuß. Akademie der Wissenschaften. Schriftleiter Georg **FEIGL**. Verlag Walter de Gruyter & Co. Bd. 56_1 (Jahrgang 1930). Sonderheft II: Arithmetik und Algebra. 95 S. Berlin u. Leipzig 1932. Preis 10,80 M. Sonderheft III: Analysis. 290 S. Berlin u. Leipzig 1933. Preis 32,80 M.

Dr. ARTHUR **MARCH**, Prof. für theoretische Physik an der Univers. Innsbruck. Einführung in die moderne Atomphysik in allgemeinverständlicher Darstellung. IV + 115 S. m. 34 Abb. im Text. Leipzig 1933, Verlag von Johann Ambrosius Barth. Preis brosch. 6 M.

Dr. HEINRICH **TIMERDING**, Prof. a. d. Techn. Hochschule Braunschweig. Aufgabensammlung zur Projektiven Geometrie. Sammlung Göschen 1060. Berlin u. Leipzig 1933. Walter de Gruyter & Co. 140 S. m. 65 Abb. Preis 1,62 M.

NACHRICHTEN

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Hauptversammlung.

Die diesjährige Hauptversammlung der Gesellschaft findet im Rahmen des neunten Deutschen Physiker- und Mathematikertages in Salzburg innerhalb der Zeit vom Sonntag, dem 3. bis Freitag, dem 8. September 1933 statt. Die Tagung beginnt mit einem allgemeinen Begrüßungsabend am Sonntag. Hierauf folgen die Fachsitzungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, der Gesellschaft für technische Physik, der Heinrich-Hertz-Gesellschaft, der Deutschen Mathematikervereinigung, sowie der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. Anmeldungen zu den Vorträgen der letzteren sind an den Vorsitzenden oder den Schriftführer, Prof. Dr. v. Mises, Berlin, Siegmundshof 9, zu richten.

Im Zusammenhang mit dem Physiker- und Mathematikertag findet auch, ähnlich wie in Prag und Königsberg, eine Tagung für Erkenntnislehre

der exakten Wissenschaften statt, auf der als Hauptthemen behandelt werden: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Logische Syntax der Sprache, Allgemeine Folgerungen aus der Quantentheorie.

Für den Fall, daß die heute bestehenden Schwierigkeiten der Grenzüberschreitung nicht rechtzeitig behoben sein sollten, ist eine Verlegung der Tagung nach einem Orte innerhalb des Deutschen Reiches in Aussicht genommen.

Aerodynamiktagung in Göttingen.

Die Ortsgruppe Göttingen veranstaltete am 6. und 7. Juni aus Anlaß des 25jährigen Bestehens des ersten Windkanals für die Luftfahrt eine Tagung, zu der alle Mitglieder der Gesellschaft eingeladen wurden. Eine große Zahl der Eingeladenen war erschienen, darunter auch mehrere Vertreter des Auslands. Der Vorsitzende, Hr. Prandtl, begrüßte die Versammlung und gab einen kurzen Überblick über die Anfänge der Göttinger Arbeiten im Interesse der Luftfahrt, die in letzter Linie auf Anregung und energische Werbearbeit des Mathematikers Felix Klein zurückgehen. Hr. v. Baumhauer-Amsterdam, der den Vorsitz der ersten Sitzung übernahm, überbrachte die Glückwünsche der holländischen Schwesteranstalt und betonte die in der ganzen Welt anerkannten Verdienste der von Prandtl geleiteten Göttinger Forschungsstätten. Es folgten nun in drei Sitzungen die wissenschaftlichen Vorträge, an die sich ausnahmslos eine angeregte Diskussion unter großer Beteiligung der Zuhörer anschloß.

Liste der Vorträge:

Dienstag vormittag.

- J. Ackeret: Tragflügel in Bodennähe.
- M. Kohler: Luftkräfte an einem treibenden Seeflugzeug.
- R. Seiferth: Schwingungsversuche an einem Flugzeugmodell.
- A. Betz: Berechnung von Tragflügelprofilen.
- J. Stüper: Auftriebsverminderung durch den Widerstand.
- O. Schrenk: Grenzschichtabsaugung.

Dienstag nachmittag.

- M. Hansen und G. Mesmer: Luftschraubenschwingungen.
- H. B. Helmbold: Breitflügelige Propeller.
- H. Reichardt: Neues Manometer.

Mittwoch vormittag.

- A. Busemann: Wirbelverteilungen geringster Energie.
- H. Mueller: Ausbildung von Drosselklappen für Talsperren.
- L. Schiller: Neue Versuche zur Turbulenzentstehung.
- L. Prandtl: Übersicht über laufende Arbeiten.
- H. Schlichting: Anfachung kleiner Störungen bei der Plattenströmung.
- J. Nikuradse: Versuche zur Turbulenzentstehung.
- H. Reichardt: Turbulente Schwankungen.

Nach der Nachmittagssitzung am Dienstag fand unter Führung von Hrn. Prandtl und Hrn. Betz eine eingehende Besichtigung der Aerodynamischen Versuchsanstalt und des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Strömungsforschung statt. Die wohlgelungene Veranstaltung, die alle Teilnehmer in jeder Richtung befriedigen mußte, bildete den schönen Abschluß einer erfolgreichen Arbeitsperiode der Göttinger Forschungsanstalt und eröffnet, namentlich im Hinblick auf den jetzt sichergestellten Bau eines neuen, vergrößerten Windkanals, die Aussicht auf weitere Erfolge im Interesse der Wissenschaft und der deutschen Luftfahrt.

Ortsgruppe Berlin.

Am 19. Mai sprach Hr. Priv.-Dozt. Dr. F. Weinig-Berlin über die Winkelübertreibung von Turbinenschaufeln.

Am 23. Juni hält Hr. Prof. Dr. Richard Fuchs-Berlin einen Vortrag über das Thema „Zur Berechnung der Auftriebsverteilung bei gegebener Tragflügelgestalt".

Prager Mitglieder.

Am 23. Februar hielt Hr. Dr. D. E. Olschevsky (bisher in Akron) in Prag einen Vortrag über Theorie und Prüfung von Propellerschwingungen.

Am 4. Mai sprach Hr. Ing. Treml über Gebäudeschwingungen mit besonderer Berücksichtigung von Hochbauten in Erdbebengebieten und in Gegenden mit Industriebeben.

Am 1. Juni sprach Hr. Prof. Mack-Prag über Zusammensetzung von Drehungen und Schraubungen im Raum.

Vierter internationaler Kongreß für technische Mechanik in Cambridge.

Gemäß den Beschlüssen des Stockholmer Kongresses von 1930 findet in Cambridge (England) in der Zeit vom 3. bis 9. Juli 1934 der IV. internationale Kongreß für angewandte Mechanik statt. Das Organisationskomitee, das aus den Herren L. Bairstow, W. S. Farren, C. E. Inglis, B. Melvill Jones, R. V. Southwell, G. I. Taylor besteht, versendet soeben ein erstes Rundschreiben. Es wird darin vorgeschlagen, die Vorträge in folgende vier Gruppen zu teilen: 1. rationelle Mechanik einschließlich Schwingungen, 2. Mechanik der Flüssigkeiten und Gase, 3. Festigkeitslehre einschließlich Plastizität, Kristallstrukturen usf., 4. Wellenbewegungen einschließlich Stabilität und Widerstand von Schiffen. Alle Anfragen sind zu richten an das Sekretariat: 4th International Congress for Applied Mechanics, Engineering Laboratory, Cambridge (England).

Persönliches.

Am 29. April verstarb im Alter von 82 Jahren Hr. Prof. Dr. Lebrecht Henneberg, der vierzig Jahre als Professor der Mechanik an der Techn. Hochschule in Darmstadt wirkte. Er ist bekannt als Verfasser eines verbreiteten Lehrbuches über die Statik starrer Systeme und hat sich besonders um die Fachwerktheorie verdient gemacht, die er durch ein nach ihm benanntes Verfahren der Spannungsberechnung bereicherte.

Am 30. Mai starb in Leningrad unser Mitarbeiter S. A. Gerschgorin, Professor für theoretische Mechanik am Maschinenbauinstitut in Leningrad, im 32. Lebensjahr. Er gehörte zu den begabtesten und zukunftsreichsten der jungen russischen Mathematiker, die sich auf dem Gebiete der angewandten Mathematik und Mechanik betätigten.

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 21.
Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.